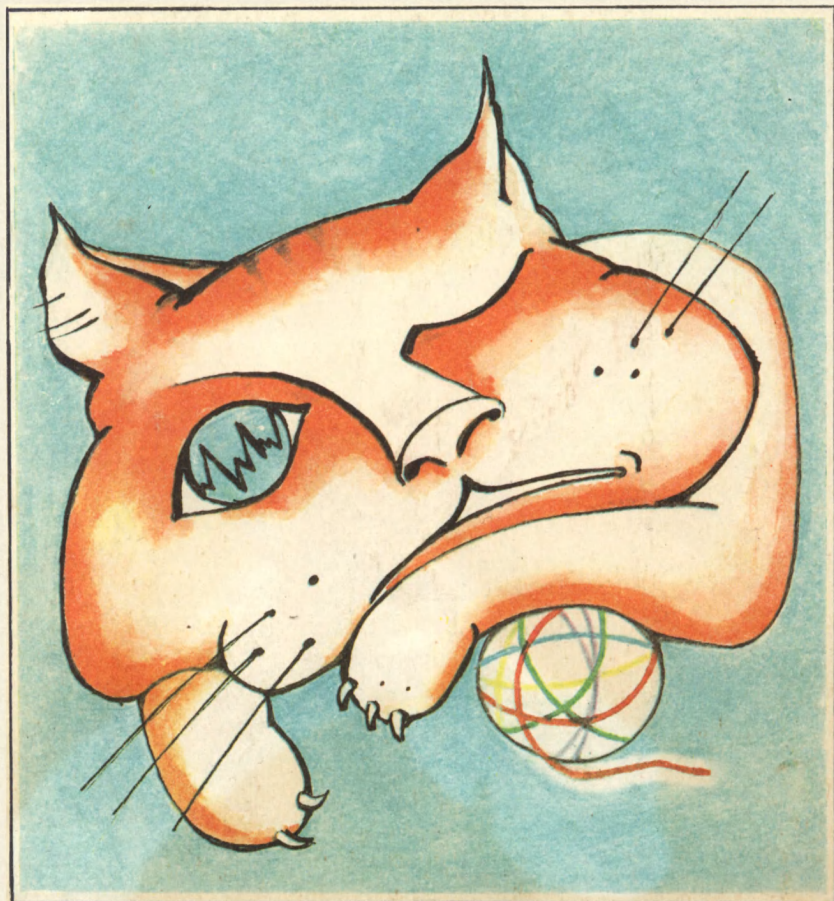




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •

выпуск 50

ЗАНИМАТЕЛЬНО О ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ





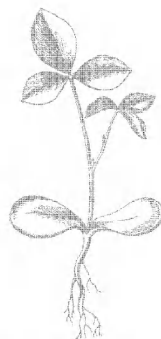
БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •

выпуск 50

ЗАНИМАТЕЛЬНО О ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ



**МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987**



Scan AAW

ББК 22
З-27
УДК 501 (023)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик Ю. А. Осипьян (председатель), академик А. Н. Колмогоров (заместитель председателя), профессор Л. Г. Асламазов (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР А. А. Абрикосов, академик Б. К. Вайнштейн, заслуженный учитель РСФСР Б. В. Воздвиженский, профессор С. П. Капица, академик С. П. Новиков, академик АПН СССР В. Г. Разумовский, академик Р. З. Сагдеев, профессор Я. А. Смородинский, академик С. Л. Соболев, член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев.

Ответственный редактор выпуска Л. Г. Асламазов

Художник Д. А. Крымов

З-27 **Занимательно о физике и математике** /Сост. С. С. Кротов, А. П. Савин.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 144 с.— (Б-чка «Квант». Вып. 50.)
45 коп. 336 000 экз.

Раздел «Квант для младших школьников» вызвал большой интерес у широкой читательской аудитории. Издание наиболее оригинальных статей и задач легло в основу этого сборника.

Обсуждается физический смысл некоторых интересных явлений, описывается ряд изящных опытов, которые могут быть воспроизведены в домашних условиях. Математические статьи рассказывают о любопытных фактах, учат читателя логически мыслить. В книгу включено около 100 задач по различным темам математики и физики, решение которых требует, как правило, не специальных знаний, а наблюдательности и сообразительности.

Для школьников, интересующихся физикой и математикой.

З $\frac{1702010000 - 150}{053 (02)-87}$ КБ-7-68-87

ББК 22

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЮ

Не секрет, что пытливый человеческий ум всегда двойко реагирует на то, что называют «занимательным». С одной стороны — это вполне независимая от наших желаний постоянная тяга ко всему, что называют этим словом. С другой стороны — это вполне здоровое недоверие по поводу того, так уж ли занимательно то, что предлагают авторы.

И если да, то все ли здесь правда...

Согласитесь, уважаемый читатель, что название книги, которую Вы только что открыли, логически безупречно, поскольку ответить на вопрос, занимательна она или нет, можете только Вы, читатель, после того, как прочтете эту книгу. Тем не менее мы взяли на себя смелость назвать книгу именно так. В оправдание своей уверенности приведем «историческую справку».

В январе 1970 г. вышел в свет первый номер научно-популярного физико-математического журнала «Квант».

Этот журнал, издаваемый Академией наук СССР и Академией педагогических наук СССР, был задуман как научный журнал для школьников старших (8—10) классов.

Однако почти сразу после выхода первого номера в редакцию стали поступать письма от школьников, родителей и учителей с просьбой публиковать материалы и для школьников 5—7 классов. Учитывая эти пожелания, редакция журнала с 1972 г. открыла рубрику «Квант для младших школьников».

Это название рубрики оказалось не совсем точным.

Во-первых, потому, что младшими школьниками принято считать учеников начальной школы, а не школьников 5—7 классов (правда, позднее предлагались и другие названия раздела — «Квантик»,

«Зеленые страницы» и др.). Во-вторых, потому, что материалы для этой рубрики подбирались так, чтобы они были интересны и школьникам старших классов.

Сначала это были лишь занимательные задачи, а с 1973 г. стали публиковаться и статьи.

Наш опыт работы в составе редколлегии журнала «Квант» свидетельствует о том, что с удовольствием читают статьи этого раздела и решают предлагаемые задачи не только старшие и младшие школьники, но и старшие и младшие научные сотрудники и даже академики.

Предлагаемая книга является сборником избранных статей и задач из рубрики «Квант для младших школьников»

за 14 лет ее существования. Поскольку именно эта рубрика журнала в наибольшей степени продолжила традиции той области научно-популярной литературы, которую называют занимательной физикой и математикой, нам ничего не оставалось, как назвать книгу именно так.

С. С. Кротов, А. П. Савин



будем рассуждать - логически - 27

о смене «шести» - 1

ищите 50

движение «покой» - 7

о физике молекул и теплоте - 67

физик + МАТЕМАТИКА = ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ

задачи занимательные - для симметрии - 124

2
введение - почему книга получилась именно такой - 3



может при

годится - свет

и цвет - 115

метр - 96

6



побываем - в мире гео-

мий этнографически 423

А
КА
об электричестве -

3



ответ - 133

пришла пора и посмотреть

СОДЕРЖАНИЕ

Обращение к читателю	3
1. Про движение и покой	7
<i>Н. А. Минц.</i> Почему подушка мягкая?	7
<i>С. С. Кротов.</i> О давлении и законе Паскаля, или почему у сыра круглые дыры	8
<i>Н. А. Родина.</i> Архимедова сила и киты	12
<i>Я. А. Смородинский.</i> Путешествие мистера Клока	16
<i>В. В. Невгод.</i> Приключения Ганса Пфааля и толстяка Пайкрафта	18
<i>А. А. Варламов, А. И. Шапиро.</i> Об «OVO»	20
<i>Н. А. Родина.</i> О всемирном тяготении, приливах и отливах	23
2. Будем рассуждать логически	27
<i>Ф. А. Бартнев, А. П. Савин.</i> Метод перебора	27
<i>А. И. Орлов.</i> «Все», «некоторые» и отрицание	30
<i>Ф. А. Бартнев, И. Л. Никольская.</i> О пользе нелепостей	33
<i>Е. Е. Семенов.</i> Доказать можно? — Доказать нельзя!	38
3. Об электричестве лишь эпизодически	42
<i>Ю. Г. Горст.</i> На даче	42
<i>В. В. Майер.</i> Электричество и ...температура	44
<i>В. С. Данюшенков.</i> Электронный глаз	46
4. О счете и числах — те или не те...	50
<i>А. П. Савин.</i> О больших числах	50
<i>А. П. Савин.</i> Для чего нужны проценты?	53
<i>А. П. Савин, Л. М. Финк.</i> Разговор в трамвае	55
<i>А. Д. Бендукидзе.</i> Фигурные числа	59
<i>А. Д. Бендукидзе, А. П. Савин.</i> Производные пропорции	62
<i>А. А. Старичков.</i> Необыкновенная девочка	64
<i>Я. А. Смородинский.</i> Календарные курьезы	65
5. О физике молекул и теплоте	67
<i>Н. А. Родина.</i> Как измерить молекулу	67
<i>Н. А. Родина.</i> Можно ли взвесить молекулу?	70
<i>Л. И. Тучинский.</i> Может ли быть невозможное?	73
<i>Д. Д. Алексеев.</i> Водяные пары	77
<i>Е. И. Пальчиков.</i> Почему в холодильнике сохнут продукты?	78
<i>А. А. Боровой.</i> Зимний калейдоскоп	80
<i>А. А. Дозоров.</i> Можно ли носить воду в решете?	82
<i>Т. С. Петрова.</i> Огонь в решете	87
<i>Н. А. Минц.</i> Гейзеры	88
<i>Л. Г. Асламазов.</i> Как моет мыло?	92
<i>А. В. Токарев.</i> Дом, который построил...	94
6. Побываем в мире геометрии	96
<i>А. П. Савин.</i> Как нарисовать пятиконечную звезду	96
<i>А. П. Савин.</i> Циркулем и линейкой	99
<i>А. П. Савин.</i> Координаты	102
<i>А. П. Савин.</i> Кое-что о выпуклости	105
<i>А. П. Савин.</i> Олимпийские кольца	108
<i>А. Т. Калинин.</i> Эта удивительная вязь колец	111
7. Свет и цвет	115
<i>А. А. Дозоров.</i> С линзой и без...	115
<i>В. А. Фабрикант.</i> Сюрпризы зеленого стекла	119
Задачи по физике	124
Задачи по математике	127
Ответы к задачам	133

1. ПРО ДВИЖЕНИЕ И ПОКОЙ

ПОЧЕМУ ПОДУШКА МЯГКАЯ?

Н. А. Минц



Почему подушка мягкая? Почему удобно лежать на перине или на надувном матрасе, а лежать на досках или на твердой земле неудобно?

Если вы просто скажете, что пух или воздух мягкие, а доски и земля твердые, то будете не совсем правы. Дело вовсе не в свойствах материала — и доски, и твердая глина могут быть «мягкими». И из твердого материала можно сделать удобное ложе, если придать ему форму человеческого тела.

Представьте, что вы легли на мягкую глину и оставили в ней углубление, соответствующее форме вашего тела. Высохнув, глина станет твердой как камень. Если теперь вы ляжете в получившееся углубление, вам будет очень удобно, несмотря на то, что ваше «ложе» никак не назовешь мягким. (Правда, на самом деле при высыхании глины размер углубления несколько изменится, но здесь мы это учитывать не будем.)

Так в чем же дело? Оказывается, впечатление мягкости или твердости зависит не от свойства материала, а от величины давления на поверхность тела. Проведем небольшой расчет.

Будем считать, что масса взрослого человека около 60 кг, а поверхность тела примерно 2 м^2 . Если человек лежит в постели, которая прогибается и как бы «охватывает» тело, с ней соприкасается примерно четверть всей поверхности его тела.

Нетрудно подсчитать, что в этом случае на один квадратный сантиметр поверхности приходится всего 12 г. А если этот же человек ляжет

на твердую, неупругую поверхность, площадь соприкосновения составит только около ста квадратных сантиметров. Тогда на один квадратный сантиметр придется уже 600 г, то есть давление возрастет в 50 раз?



О ДАВЛЕНИИ И ЗАКОНЕ ПАСКАЛЯ, ИЛИ ПОЧЕМУ У СЫРА КРУГЛЫЕ ДЫРЫ

С. С. Кротов

...На полянке рос высокий-превысокий дуб, а на самой верхушке этого дуба кто-то громко жужжал: жжж! Винни-Пух сел на траву под деревом, обхватил голову лапами и стал думать. Сначала он думал так: «Это — жжжжж — неспроста! Зря никто жужжать не станет. Само дерево жужжать не может. Значит, тут кто-то жужжит. А зачем жужжать если ты — не пчела? По-моему, так!». Потом он еще подумал — подумал и сказал про себя: «А зачем на свете пчелы? Для того, чтобы делать мед! По-моему, так!». Тут он поднялся и сказал: «А зачем на свете мед? Для того, чтобы я его ел! По-моему, так, а не иначе!»

Почему многие любят симпатичного героя — медвежонка Винни-Пуха? Наверное, потому, что он нам напоминает нас самих, когда мы были маленькими, задавали всякие глупые (по мнению взрослых) вопросы и тут же хотели получить на них ответы. Но задавать вопросы очень полезно в любом возрасте. И конечно — при знакомстве с физикой. Давайте попробуем — может быть мне удастся вас в этом убедить.

Не приходилось ли вам в детстве читать сказку «Два жадных медвежонка»? Не знаю, как вам, но мне больше всего запомнилась сама книжка, причем, незабываемое впечатление произвели красочные иллюстрации с исчезающей на глазах головкой сыра в ярко-красном «мундире» и ужасно «дырявой» внутри. Дырки были абсолютные круглые и все почти одинаковые — не так ли? С тех пор прошло много времени,

и лишь недавно я понял, что за устройство дырок в сыре отвечает один из фундаментальных законов природы — закон Паскаля. Не забыли, как он звучит? *Давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения в каждую точку жидкости или газа.* Как видите, главным действующим лицом выступает давление. Вот и давайте прежде всего обсудим эту физическую величину.

Помните, как в печальной сказке «Серая шейка» хитрая лиса подползала к полынье, в которой плавала Серая шейка? Понимая опасность передвижения по тонкому льду, лиса распластывалась по нему как только могла. Но сила, с которой она давит на лед, не зависит от ее положения — лиса ведь не становится легче от того, что она стоит, а не лежит. Нет ли здесь противоречия? Нет.

Оказывается, все дело в том, на какую площадь поверхности приходится эта сила давления. Чем больше поверхность соприкосновения лисы и льда, тем меньше сила, прогибающая лед в различных его участках, тем безопаснее по нему передвигаться. (Лиса была хитрая и знала об этом.) Точно так же и для описания многих других явлений мало знать общую силу давления — силу, с которой давят друг на друга соприкасающиеся тела, а важно знать, какая сила приходится на единицу площади поверхности их соприкосновения. Но сила давления, приходящаяся на единицу площади поверхности, — это и есть давление. Не припомните еще какую-нибудь историю, в которой все (с точки зрения физики) определялось именно давлением? Ну, конечно, это сказка Х. К. Андерсена «Принцесса на горошине». Почему горошина, попавшая в постель принцессы, могла вызвать у нее столь неприятные ощущения? Опять все дело в давлении. Очевидно, что как с горошиной, так и без нее общая сила, «удерживающая» принцессу на кровати, остается неизменной. Но если на кровати появится выступающая часть в виде горошины, то давление в этом месте резко возрастет. Вы не станете возражать, что вовсе не нужно быть изнеженной принцессой, чтобы обнаружить в своей постели небольшую горошину? Я думаю, что с этим справился бы и свинопас.



А вот обнаружить горошину через толщу нескольких пуховых перин (в сказке их было двенадцать — не так ли?) — это требует изысканной утонченности чувств. Чуть дальше мы обсудим, почему пуховая перина, положенная поверх горошины, способна все запутать (а может быть и нет, если, конечно, принцесса настоящая).

Итак, давление — это величина, равная отношению силы, действующей перпендикулярно к поверхности, к площади этой поверхности. Но в законе Паскаля неявно присутствует вроде бы еще одно давление — давление внутри жидкости или газа. Получается так, что жидкость внутри как-то «узнает» о том, что извне на нее что-то давит. То есть действующее на внешнюю поверхность жидкости давление передается самой жидкостью от точки к точке, причем, одинаково во всех направлениях. И это является неотъемлемым свойством именно жидкости. Так она «устроена». Разберемся в этом подробнее. Нам понадобится мягкая пружина. Например, такая, как в пневматическом пистолете. Если ее положить на стол, то расстояние между соседними витками будет одинаковым по всей длине пружины. А вот

если ту же пружину поставить вертикально, то под действием силы тяжести витки начнут «падать» вниз, приближаясь друг к другу. В конце концов в разных сечениях пружина будет сжата по-разному — чем ниже витки, тем меньше будет расстояние между ними. В чем здесь дело? В результате взаимных перемещений витков в пружине возникают упругие силы, причем, чем ниже витки, тем большую часть пружины они несут на себе, тем сильнее они сжаты. Итак, в различных сечениях давление в пружине разное. Чтобы увидеть картину давления внутри тела, сожмите в руке поролоновую губку. Какие-то участки поролона сожмутся, какие-то, наоборот, растянутся. Чем сильнее сжат какой-то участок, тем меньше в нем и размеры соответствующих «пор».

Как видите, о внутренних давлениях мы могли судить для пружины — по изменению расстояний меж-



ду соседними витками, для поролона — по изменению размеров «пор».

Жидкость или газ в отличие от твердых тел, как правило, могут быть только сжаты. Причем, если в непроцепаемую оболочку налить жидкость и сильно сжать ее, то (если не учитывать силу тяжести) она будет сжата одинаково по всему объему — изнутри нельзя отличить одну точку от другой. Важно, что независимо от формы внешней поверхности давление из любой точки жидкости передается во все соседние точки одинаково. Чтобы сделать свои слова более наглядными, я вынужден буду попросить у вас прощения и напомнить не самые лучшие минуты жизни. Всем нам когда-то делали уколы. Помните, как прежде, чем сделать укол, врач надавливает на шприц и из тоненькой иголки выпускает струйку целебной жидкости? Представим теперь, что нам удалось по всей поверхности шприца наделать небольших отверстий и вставить в них иголки, — у нас получилось что-то вроде ежика. Если теперь надавить на поршень шприца-ежика, то из всех иголок, находящихся на одной высоте, будут бить абсолютно одинаковые струйки. Это происходит потому, что жидкость подчиняется закону Паскаля и выдавливается из отверстий, находящихся на одной высоте, с одинаковой силой. Для отверстий, находящихся на разных высотах, необходимо учитывать вес соответствующего столба жидкости.

Для сравнения упругих свойств жидкости и твердого тела приведем еще один пример. Представим себе, что в одну узкую мензурку мы опустили пружину (такую, что диаметр ее витков совпадает с внутренним диаметром мензурки), а в другую — налили воду. Вообразим теперь, что стенки сосудов внезапно исчезли. Как будут вести себя пружина и вода? Пружина останется на месте, как ни в чем не бывало. Вода же разлетится во все стороны, как лопнувший пузырь. Как вы думаете, почему? Причина различного поведения — в различных способах передачи давления твердым телом и жидкостью. Пружина передает давление практически только по своей длине. В воде же давление передается одинаково во все стороны — и вверх,



и вниз, и вбок — в соответствии с законом Паскаля. Кстати сказать, аналогичную картину наблюдал сам Паскаль, когда устанавливал свой закон. Если вы вспомните его классический опыт, то по своей идее он напоминает только что описанный мысленный эксперимент (именно мысленный — мы ведь его себе представили). Правда, у Паскаля стенки сосуда — бочки — не исчезали, а трескались, и по форме возникающего «фонтана» можно было судить о давлениях в разных частях жидкости. Теперь легко понять «действие» пуховой перины. Взбитая перина представляет собой как бы гору маленьких пружинок, случайным образом расположенных друг относительно друга. Каждая такая пружинка передает давление по своей длине, но из-за хаотичности расположения пружинок сила давления со стороны горошины передается... Но не будем лишать вас радости самостоятельного поиска правильного решения. Скажем лишь, что несмотря на все ваши усилия и старания интуиция принцессы позволяла безошибочно установить любой подвох — пусть он даже исходил от величественных особ, разбиравшихся в физике.

Теперь пришло время ответить на основной вопрос статьи. (Вы его еще

не забыли?) В нескольких словах скажем о том, как делают сыр — как делают дырки в сыре. Сначала готовят «тесто» для сыра. Потом полученную массу уплотняют под большим давлением и заполняют ею специальные формы. Образовавшиеся в формах головки сыра вынимают и помещают в теплые камеры для созревания. В этот период сыр «бродит». Внутри спрессованного «теста» образуется углекислый газ, который, накапливаясь, выделяется в виде пузырьков. Чем больше углекислого газа, тем сильнее раздуваются пузырьки. (Не забудьте, что на этой стадии внутренняя часть будущего сыра представляет собой сплошную мягкую массу.) Потом сыр затвердевает, и внутри него запечатлевается картина внутреннего «дыхания» броющего сыра в виде вкраплений пузырьков углекислого газа. Что касается формы образовавшихся полостей, то, согласно закону Паскаля, давление в пузырьках одинаково передается во все стороны — это во-первых, а во-вторых, «тесто» в этот момент подобно жидкости по своим упругим свойствам. Поэтому пузырьки раздуваются строго сферической формы. Отступление от этого правила будет означать, что в каком-то

месте внутри имеются уплотнения или, наоборот пустоты в «тесте». Чем тверже сыр, тем меньше раздувается внутренний пузырек, тем меньше размер дырки. Некоторые сорта сыра перед созреванием не подвергаются обработке высоким давлением (например, российский сыр), и в них выделение углекислого газа при брожении происходит в уже имеющиеся в «тесте» пустоты, как правило, неправильной формы — это промежутки, оставшиеся между зернами полуфабриката после спекания «теста» в печке. Такие сыры в разрезе имеют не правильную картину застывших пузырей, а довольно затейливый узор, гармония которого откроется только опытному сыроделу.

Вот видите, сколько нам пришлось задать разных маленьких вопросов, чтобы ответить на один большой — почему у сыра круглые дыры.

— Здорово, Пух,— сказал

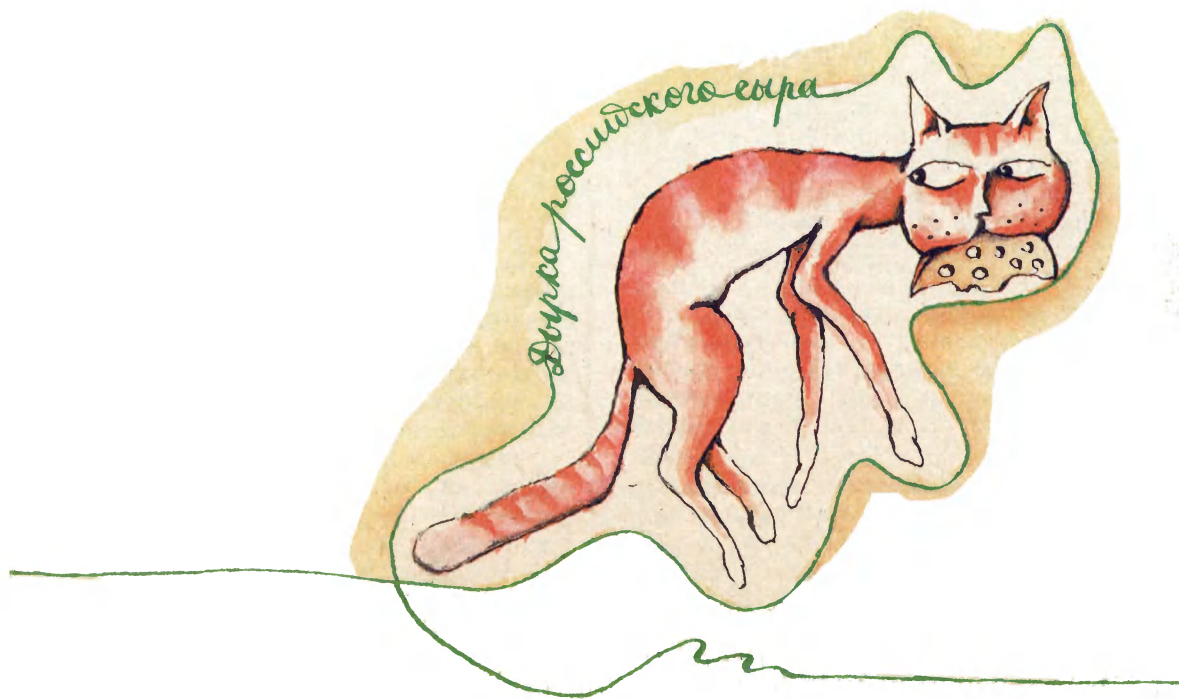
Кролик.

— Здравствуй, Кролик,— сказал Пух сонно.

— Это ты сам додумался?

— Да, вроде как сам,— отвечал Пух.— Не то чтобы я умел думать,— продолжал он скромно,— ты ведь сам знаешь, но иногда на меня это находит.

(А. А. Милн. «Винни-Пух и все-все-все»).



АРХИМЕДОВА СИЛА И КИТЫ

Н. А. Родина

На суше гусь производит впечатление малоподвижной, неуклюжей птицы. «На красных лапках гусь тяжелый...» — так писал А. С. Пушкин, применяя очень выразительное слово «тяжелый» для характеристики птицы. Но вот гусь вошел в воду и поплыл... Теперь мы видим уже легкую, грациозную птицу, движущуюся быстро и свободно. Даже дуновения ветра достаточно, чтобы изменить скорость ее движения. Отчего такая перемена?

Особенности поведения тел в воде связаны с малым трением и наличием выталкивающей — архимедовой — силы.

Положите на стол пробку или пластмассовую крышечку и подуйте на нее сбоку. Она не сдвинется с места. Поместите пробку на поверхность воды — от дуновения она легко начнет двигаться. Вы убедитесь, что сила трения в воде намного меньше силы трения между твердыми телами. Поэтому и птица легко скользит по воде.

А держится гусь на поверхности воды (не тонет) потому, что равны друг другу две действующие на него в противоположных направлениях силы: сила тяжести и архимедова сила.

В совершенстве приспособлено для жизни в воде тело самого большого животного на Земле — кита. Наиболее крупные представители отряда китообразных — голубые киты. Масса голубого кита достигает 130 тонн, но он способен развивать в воде скорость до 20 узлов (узел — скорость, равная одной морской миле

в час, а так как морская миля равна 1,852 км, то узел — это скорость, равная 1,852 км/ч). Для сравнения укажем, что моторная лодка МКМ может развивать скорость до 30 км/ч, то есть около 16 узлов.

Кит кашалот, имеющий массу 60 тонн, выскакивая из воды, поднимается над ее поверхностью на несколько метров.

Многое в поведении морских животных можно объяснить на основании законов и понятий физики. Но сначала ознакомимся с некоторыми данными о китах. Знаменитый исследователь морских глубин французский ученый Жак-Ив Кусто (это он изобрел акваланг) в своей книге «Могучий властелин морей» пишет: «Трудно описать ощущения человека, который впервые встречается в воде с китом... Прежде всего нас ошеломляют размеры кита. Они превосходят все, что человек привык видеть в мире животных, превосходят все, что он себе представлял».

Рисунок 1 дает представление о том, во сколько раз размеры голубого кита больше, чем размеры слона и человека. Длина этого кита достигает 33 м, он почти на 10 м длиннее пассажирского вагона! (Недаром в русских сказках упоминается «чудо-юдо рыба-кит», у которого «на спине село стоит».)

О массе китов мы уже говорили. Самый большой из добытых китов имел массу 150 000 кг, а самое большое наземное животное — слон — имеет массу от 3000 до 6000 кг (как язык некоторых китов!).

Тело плавает в воде, если действующая на него выталкивающая (архимедова) сила и сила тяжести равны между собой. Давайте рассчитаем архимедову силу, действующую на голубого кита, и сравним ее с силой тяжести.

Архимедова сила равна весу жидкости, вытесненной погруженным в нее телом, то есть

$$F_A = g\rho_{\text{ж}}V,$$

где $g \approx 10$ Н/кг, $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости, в данном случае морской воды (1030 кг/м³), V — объем тела. Как вычислить объем кита? Сделаем это так: будем считать, что тело кита



Рис. 1

имеет форму цилиндра. Тогда его объем равен $V = \pi d^2 h / 4$, где d — диаметр цилиндра, h — его высота. В нашем случае высота h — это длина кита. А чему равен диаметр нашего кита-цилиндра? Будем считать, что это средний диаметр тела кита. А средний диаметр оценим с помощью рис. 1. Для этого измерим на рисунке диаметр кита в нескольких, например в десяти, разных местах: у головы, у хвоста, у середины. Среднее арифметическое этих измерений и примем за диаметр кита-цилиндра. Но только учтем, конечно, что рис. 1 сделан в определенном масштабе: на рисунке длина кита $\approx 7,5$ см, а на самом деле его длина 30 м, так что масштаб рисунка равен 1:400.

Прodelайте дальше все расчеты, и вы убедитесь, что архимедова сила, которая поддерживает в воде тело кита, исчисляется миллионами ньютонов. Разумеется, наши вычисления очень приближенные и нельзя назвать точное число ньютонов, но то, что оно находится между одним и десятью миллионами ньютонов — точно.

Мы ставили задачу — сравнить архимедову силу, действующую на кита, с силой тяжести; для вычисления силы тяжести нужно 10 Н/кг умножить на массу кита. Вы видите, что и здесь мы получаем величину, измеряемую миллионами ньютонов, значит, архимедова сила удерживает тело кита в равновесии.

Конечно, кит не сможет находиться на суше. Известны случаи, когда киты по непонятным пока до конца причинам выбрасываются на берег океана. Громадная сила тяжести (свыше миллиона ньютонов) прижимает животное к земле. Скелет кита не приспособлен к тому, чтобы выдержать эту тяжесть, даже дышать кит не может, так как для вдоха он должен расширить легкие, приподнять мышцы, окружающие грудную клетку, а в воздухе эти мышцы

весят несколько десятков тысяч ньютонов.

Жак-Ив Кусто пишет: «...на суше перед гигантами вставляли неразрешимые проблемы... дыхание требовало огромных усилий... на суше скелет кита не выдерживает веса мышц и жирового слоя, между тем как в плотной водной среде он отлично служит киту».

Во время экспедиции Кусто и его товарищи пытались спасти попавшего на мель китенка, масса которого была «всего» две тонны. Чтобы поднять его на борт судна, пришлось применить специальный гамак, так как даже новорожденный китенок может «сломаться» под действием собственной силы тяжести, если под ним нет равномерной опоры. Именно такую равномерную опору создает телу в воде архимедова сила.

На рис. 2 вы видите фотографию спящего в воде кита. Он не полностью погружен в воду. Значит, действующая на него выталкивающая сила должна быть меньше, чем в случае полного погружения (ведь эта сила равна весу жидкости, вытесненной китом). А сила тяжести осталась прежней. Казалось бы равновесие должно нарушиться. Но кит спокойно спит на воде, он не тонет. Следовательно, архимедова сила и сила тяжести по-прежнему равны друг другу. Как объяснить это кажущееся противоречие?

Теперь самое время рассказать о том, как кит ныряет и как всплывает.

Хвост кита имеет горизонтальные лопасти, он развивает мощность до 500 лошадиных сил (одна лошадиная сила — это единица мощности, равная примерно 736 Вт). Для сравнения скажем, что эта мощность только в два раза меньше мощности двигателя самолета Ан-2 и в семь раз больше мощности двигателя трактора ДТ-75. Когда аквалангист заде-

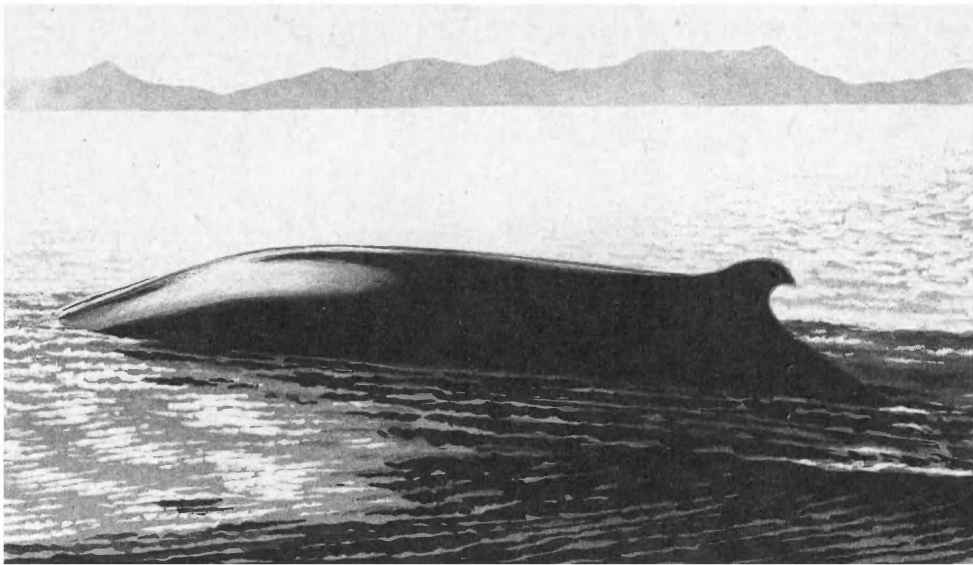


Рис. 2

вает корпусом плывущий кит, «впечатление такое, словно толкнул мчащийся паровоз».

Могучим движением хвоста кит направляет свое тело в глубину океана — ныряет. Глубина погружения равна нескольким десяткам метров, а кашалоты даже достигают глубины 1000—1200 м. На такой глубине давление воды велико (рассчитайте его сами, учитывая, что плотность морской воды равна 1030 кг/м^3). Легкие кита под этим давлением сжимаются до так называемого остаточного объема. У человека на глубине 60 м, где давление в четыре раза больше атмосферного, объем легких

выталкивающей силой, какая действовала на кита, плавающего внутри воды, но теперь уже для создания такой же выталкивающей силы киту не нужно полностью погружаться в воду — ведь его объем стал больше. Итак, при вдыхании воздуха объем тела кита увеличивается настолько, что ему уже не нужно полностью погружаться в воду, чтобы вес вытесненной им воды равнялся силе тяжести, действующей на кита.

В связи с этим подумайте над такой задачей. Известно, что киты заплывают иногда в сильно опресненные лагуны у побережья Чукотского полуострова. Предположим, что в

уменьшается в четыре раза — от 6 л на поверхности воды до 1,5 л; следовательно, для легких человека на глубине 60 м остаточный объем равен 1,5 л.

От сжатия легких объем тела кита уменьшается, а с ним уменьшается и выталкивающая сила, кит не всплывает и держится на нужной ему глубине.

Когда кит движется из глубины к поверхности воды, архимедова сила постепенно понемногу увеличивается (почему?). Вынырнув на поверхность, кит вдыхает воздух, объем его тела увеличивается, увеличивается и выталкивающая сила. Сила тяжести уравнивается такой же

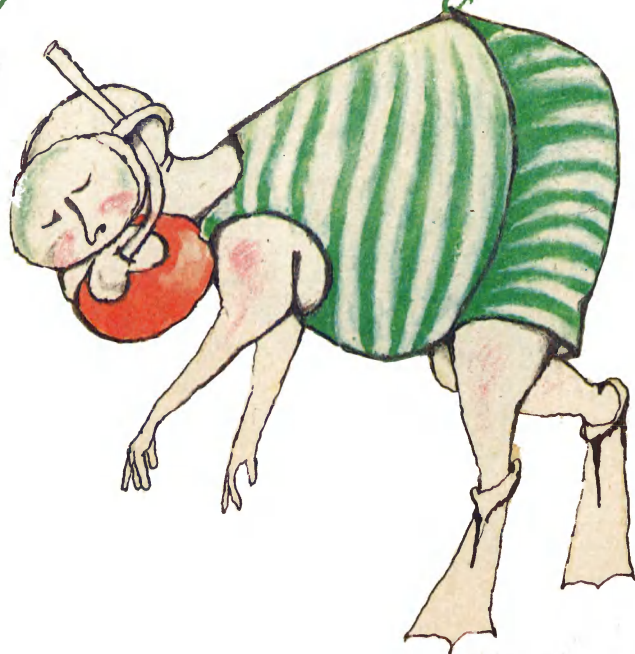
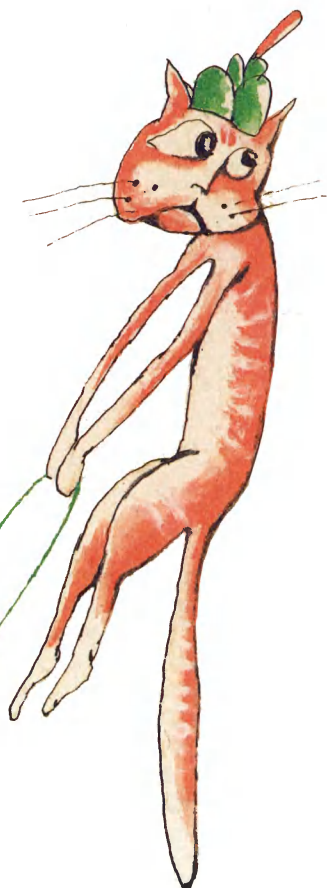
пресную воду заплыв кит, изображенный на фотографии (рис. 2). Что изменилось бы в расположении кита в этом случае, если считать, что все данные, кроме состава воды, не меняются? И в заключение нашего рассказа — несколько вопросов:

1. Если массу кита разделить на его объем, то мы получим среднюю плотность его тела. Можно ли утверждать, что где бы ни плавал кит — в глубине океана, в его средних слоях или на поверхности, средняя плотность тела кита всегда равна плотности воды? За счет чего изменяется средняя плотность?

2. Для наблюдений и съемок китов использовали воздушный шар,

наполняемый горячим воздухом при помощи газовой горелки. Почему такой шар (монгольфьер) поднимается в воздухе? По мере подъема шара пламя горелки регулировали, и оказалось, что шар может быть уравновешен в воздухе так, что в безветренную погоду он будет сколь угодно долго висеть над одной точкой моря. Что можно в этом случае сказать о соотношении между массой вытесненного шаром воздуха и массой самого шара вместе с наблюдателем?

3. Попробуйте объяснить такое явление, наблюдавшееся Жак-Ивом Кусто: «...вода впереди пузырилась, словно газированная. Это стая рыбок то уходила вглубь, то снова поднималась к поверхности и выпускала воздух из плавательных пузырей». Зачем рыбки выпускают воздух и когда именно они это делают: уходя вглубь или поднимаясь к поверхности?



ПУТЕШЕСТВИЕ МИСТЕРА КЛОКА

Я. А. Смородинский

Начало этой истории похоже на детективный роман. В один из весенних дней 1970 г. на борту самолета, совершающего кругосветный рейс, находились два пассажира. Один из них был американский физик Хафель, другой занимал целых два места и был зарегистрирован в аэропорту как мистер Клок. Мистер Клок был на самом деле часами*, очень точными атомными часами, которые отсчитывали время с 13 знаками**.

Путешествие было предпринято для того, чтобы продемонстрировать эффект изменения хода часов, предсказываемый теорией относительности.

Опыт был поставлен так, что в нем участвовали на самом деле не один, а два самолета, в каждом из которых путешествовали по два экземпляра атомных часов. (Мистера Клока во втором самолете сопровождал другой физик Китинг.)

Один из самолетов летел с запада на восток, другой — с востока на запад. Маршрут их пролегал на высоте примерно в 10 км и шел вдоль земной параллели. Скорость самолетов была около 1000 км/ч, так что свой рейс они завершали примерно за двое суток (считая остановки в пути).

Когда показания часов сверили с часами на аэродроме, то оказалось,

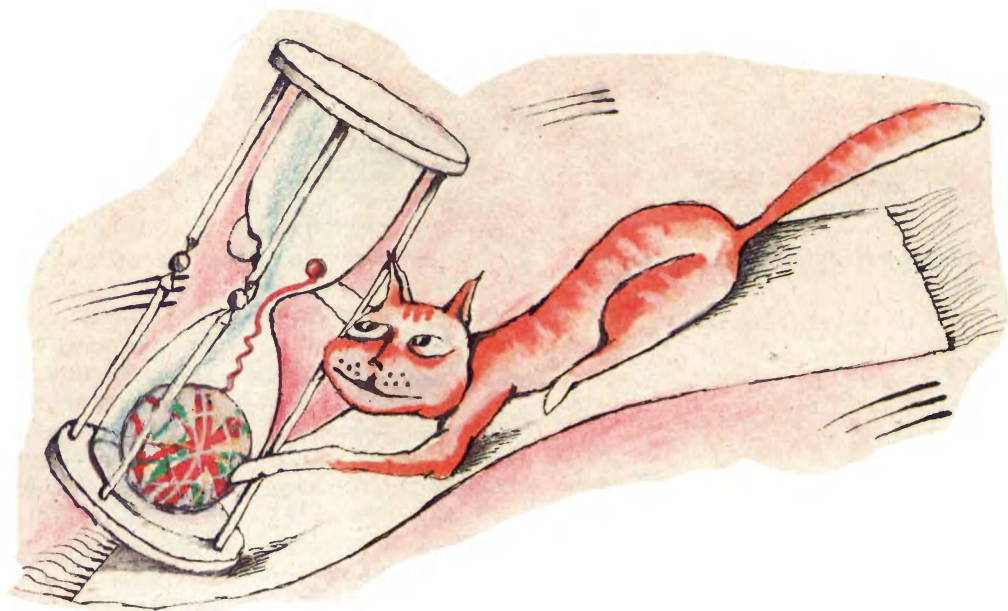
что часы, которые летели на самолете с запада на восток, отстали на 5 стомиллионных долей секунды (как сейчас принято говорить, — на 50 наносекунд). Часы, облетевшие Землю с востока на запад, ушли вперед на 16 стомиллионных секунды (160 нс). Хотя в опыте было много помех, которые трудно поддаются точному учету (например, посадки самолета в промежуточных аэропортах), тем не менее эффект изменения хода часов в полете был продемонстрирован очень убедительно.

Вы, наверное, слышали, что теория относительности предсказывает замедление времени на быстро летящих объектах. И хотя удлинение жизни космонавтов, путешествующих к далеким звездам, пока лишь тема научно-фантастических романов, физики, занимающиеся элементарными частицами, наблюдают эффект замедления времени уже давно. Им хорошо известно, что летящая с большой скоростью распадающаяся частица, например, μ -мезон «живет» дольше, чем покоящийся μ -мезон. На ускорителях, где получают сейчас пучки мезонов, летящих с большими скоростями, такой эффект удлинения жизни частиц измерен, и опыт подтверждает формулу теории относительности очень хорошо.



*) Clock по-английски означает «часы».

**) Многие годы все часы на Земле сверялись со звездными сутками — временем одного оборота Земли относительно неподвижных звезд. Но все же такие часы ошибались на 1 с за 10^8 с. Атомные часы отсчитывают время с точностью, в 100 000 раз большей.



Теория относительности утверждает, что эффект замедления времени не зависит от того, как именно устроены часы. Можно придумать такие часы, в которых ход времени определяется по числу распадов мезонов. Так как при движении время жизни частицы увеличивается, то часы будут замедленные. Атомные часы считают не распады, а число «колебаний» электронов в атомах. Тем не менее результат должен быть тот же самый, что и в воображаемых μ -мезонных часах. Это и надо было проверить.

Но на ход часов в летящем самолете действовал еще один фактор. Самолет, а с ним и часы, находился на большой высоте, где ускорение силы тяжести меньше, чем на Земле. 10 км составляют примерно 0,16% радиуса Земли, а ускорение свободного падения, по закону всемирного тяготения, обратно пропорциональное квадрату расстояния до центра Земли, оказывается примерно на 0,32% меньшим (убедитесь в этом сами).

Согласно теории относительности такой эффект тоже влияет на ход часов, только в обратную сторону. Часы на самолете должны убыстрить свой ход по отношению к часам на Земле.

В опытах мистера Клока сказывались оба эффекта. Часы, поднятые над Землей, идут быстрее земных. Кроме того, часы двигались с большей скоростью, если самолет летел с запада на восток, и с меньшей, если самолет летел с востока на запад. Здесь надо еще учитывать и скорость вращения Земли! В обоих случаях часы отставали благодаря тому же эффекту, который приводит к замедлению распада мезонов, но на разную величину. Часы не могут разделить оба эффекта («гравитационный» и «скоростной»). Но эти эффекты можно сосчитать. Результаты расчетов и опыта приведены в таблице.

Т а б л и ц а
Результаты опыта мистера Клока

Направление самолета		Теория	Опыт
Запад	Восток	— 40 нс (часы отстали)	— 50 нс
Восток	Запад	+ 275 нс (часы ушли вперед)	+ 160 нс

Согласие, конечно, не очень хорошее, но и опыт был простой, а затраты на него равны стоимости шести билетов на самолет. Вероятно, его повторяют в более хороших условиях, но вряд ли кто сейчас сомневается, что более точный опыт даст лучшее согласие с теорией.

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ГАНСА ПФААЛЯ И ТОЛСТЯКА ПАЙКРАФТА

В. В. Невгод

В этом рассказе обсуждаются две довольно любопытные и поучительные задачи по физике, условия которых взяты из литературных произведений.

У Эдгара По есть фантастический рассказ «Необыкновенное приключение некоего Ганса Пфааля». Герой этого рассказа совершил удивительное открытие — получил необыкновенный газ, плотность которого в 37,4 раза меньше плотности водорода. Шар, наполненный таким газом, обладал невероятной подъемной силой. С его помощью Ганс Пфааль даже сумел добраться до Луны.

То что газа легче водорода в природе не существует, доказывать не станем — это общеизвестно. (А вы сможете объяснить, почему это невозможно?) Но не лишена интереса задача: если бы такой газ все-таки существовал, во сколько раз увеличил бы он подъемную силу шара, наполненного им (по сравнению с шаром, наполненным водородом)?

Несмотря на несложность задачи, многие не сразу находят верный ответ. Тут так и напрашивается «логичный» вывод: поскольку газ в 37,4 раза легче водорода, то и подъемная сила его больше во столько же раз. Возможно, на такое поспешное умозаключение читателей и рассчитывал Эдгар По, когда писал свой рассказ. Впрочем, столь же вероятно, что он и сам стал жертвой ошибочного рассуждения, внешне столь логичного.

Однако простейший расчет показывает, что выигрыш в подъемной силе был бы таким ничтожным, что

его можно вовсе не принимать во внимание. Проверим это. Для этого найдем подъемную силу шара, наполненного водородом, и шара, наполненного газом Ганса Пфааля.

Пусть объем шара равен 1 м^3 . Плотность воздуха $0,00129 \text{ г/см}^3$, водорода — $0,00009 \text{ г/см}^3$, а газа Ганса Пфааля — $0,0000024 \text{ г/см}^3$. Напомним, что подъемная сила, действующая на шар, — это разность между выталкивающей силой, равной весу воздуха, вытесненного шаром, и весом газа, находящегося внутри шара (оболочку шара будем считать невесомой). Тогда подъемная сила шара, наполненного водородом, равна приблизительно 12 Н, а шара с газом Ганса Пфааля — 12,9 Н.

Таким образом, выигрыш в подъемной силе всего-навсего около 0,9 Н! Итог настолько ничтожный, что, очевидно, Гансу Пфаалю (или Эдгару По) не стоило и изобретать чудодейственный сверхлегкий газ, нарушая к тому же законы природы. (Справедливости ради заметим, что во времена Эдгара По таблица Менделеева еще не была составлена.) Вся беда — в легкости водорода. Будь возможен газ даже в тысячи раз легче водорода, он все равно не помог бы существенно увеличить подъемную силу воздушного шара. Предел такого увеличения — те 0,9 Н, которые составляют вес самого водорода.

Вспомним теперь популярный фантастический рассказ Г. Уэллса «Правда о Пайкрафте». Смешной толстяк Пайкрафт, страстно желая избавиться от лишнего веса, выпил таинственное индийское снадобье — и полностью потерял вес, в самом буквальном смысле! Целыми днями летал он под потолком собственного кабинета, не выходя на улицу, дабы не упорхнуть ввысь, подобно воздушному шару. Так продолжалось до тех пор, пока Пайкрафту не посоветовали заказать себе специальный костюм со свинцовыми прокладками. В таком костюме, в тяжелых свинцовых башмаках и с полным портфелем свинца в руках он, наконец, получил возможность вновь ходить по улицам как все люди.

Напрашивается вопрос — много ли понадобилось свинца, чтобы Пайкрафт смог спокойно ходить по Земле? Сделаем несложный расчет.

Предположим, толстяк Пайкрафт весил 1000 Н (его масса была 100 кг), тогда объем его тела можно считать равным $0,1 \text{ м}^3$. Лишенный веса, Пайкрафт как бы превратился в своеобразный шар того же объема. «Подъемная» сила его составляла всего около 1,3 Н!

И тут мы видим, как тускнеет нарисованная буйной фантазией писателя картина злключения невесомого Пайкрафта! Даже в повседневной своей одежде Пайкрафт вовсе не должен был парить под потолком своего кабинета, а мог бы, хотя



и не очень устойчиво, сидеть в кресле за письменным столом и даже осторожно ходить по комнате (избегая, правда, резких движений). А свинцовый костюм и свинцовые ботинки ему не понадобились бы вовсе — в обычной одежде, да еще взяв в руки тяжелый портфель, он мог бы ходить по улицам (конечно, остерегаясь сильного ветра), не опасаясь взлететь в небеса.

Как мы убедились, «летучесть» Пайкрафта и вызванные ею проблемы сильно преувеличены автором. Сомнительно, конечно, чтобы Уэллс не заметил этого, когда писал свой рассказ. Скорее всего, он умышленно игнорировал полученные при расчете данные, чтобы в более ярких и выразительных тонах представить комические злключения бедного Пайкрафта. При этом автор, видимо, был уверен, что читатели, увлеченные оригинальным вымыслом, так и не заметят допущенных им преувеличений.



Об «OVO»

А. А. Варламов, А. И. Шапиро

«Ab ovo» — в переводе с латыни это буквально означает «от яйца». В переносном же смысле это выражение употребляют, когда хотят указать на изначальность, первичность чего-либо. Именно этот переносный смысл и вкладывали древние как основной в слова «ab ovo». Сами того не ведая, они тем самым разрешили в пользу яйца существующий с незапамятных времен софизм: что появилось раньше — курица или яйцо? Мы этот вопрос оставим в стороне, а займемся некоторыми физическими явлениями, избрав в качестве оружия исследования... куриное яйцо.

Кто не помнит роковой причины раздора между Лилипутией и империей Блефуску, описанного в «Путешествиях Гулливера»? Этой причиной был указ императора Лилипутии, предписывающий всем его подданным под страхом смертной казни разбивать яйца с острого конца. Сам Гулливер полагал, что выбор конца, с которого следует разбивать яйцо, — дело хозяйское. С какого хочешь — с того и разбивай. Авторы полностью согласны с Гулливером, но все-таки: с какого конца яйцо легче разбить? Решение этой задачи поможет вам выбрать правильную тактику при «сражениях на вареных яйцах», которые так часто возникают за завтраком в пионерских лагерях.

Как правильно поступать: нападать на противника, или ждать нападения самому, выбрать большое яйцо или маленькое, держать его острым или тупым концом к противнику? Вот основные вопросы стратегии и тактики в таком сражении.

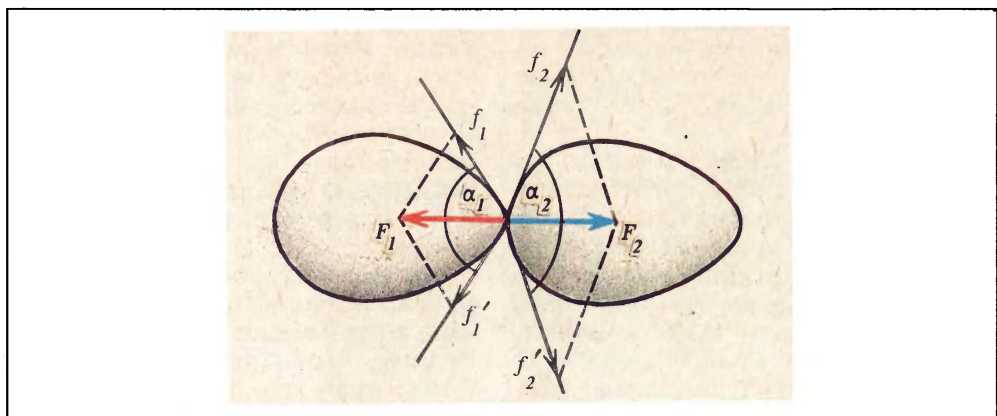
Рассмотрим теперь сам процесс столкновения двух яиц. Мы будем считать, что яйца совершенно одинаковые — и по размерам, и по форме и скорлупа у них «рассчитана» на одну и ту же предельную нагрузку. Сталкиваются яйца разными концами — одно тупым, другое острым.

Силы F_1 и F_2 , действующие в процессе столкновения со стороны одного яйца на другое, равны по модулю и направлены в противоположные стороны (см. рисунок). Эти силы являются равнодействующими упругих сил, возникающих вдоль границы области соприкосновения скорлуп. Как видно из рисунка, для того чтобы модули сил F_1 и F_2 были равны, напряжения, возникающие в скорлупе второго яйца, должны быть большими по величине, чем в первом, и, следовательно, его скорлупа треснет раньше. Так что, действительно, выгоднее сражаться держа яйцо острым концом к противнику. Имеется и еще один довод в пользу такой стратегии: в яйце у тупого конца расположен «воздушный мешок», из-за него тупой конец дополнительно теряет в прочности (попробуйте объяснить этот факт).

Обратим внимание читателя на то, что приведенный анализ указывает путь к победе с помощью маленькой хитрости. Нападающий имеет дополнительный шанс на победу, даже если его противник опытен и сражается острым концом: воспользовавшись своей активной позицией, он может ударить противника не в острие, а чуть сбоку, где кривизна уже меньше и яйцо колется легче.

...В предыдущих опытах нам нужно было вареное яйцо. А как правильно его сварить, чтобы яйцо не треснуло? Почему опытная хозяйка варит яйцо в подсоленной воде? На эти «кулинарные» вопросы вы не найдете ответа даже в толстой поваренной книге.

Треснуть яйцо может по различным причинам. Так, если вы опускаете его холодным в кипящую воду (а именно так обычно и делают для точного определения времени варения), то прогревающаяся в первую очередь скорлупа стремится расшириться, в то время как внутренность яйца еще остается холодной и расширяться не спешит. Возникающие при



этом внутренние напряжения могут привести к образованию в скорлупе трещины. Кроме того, при кипении вблизи дна кастрюли возникают вихревые потоки воды, которые могут привести к раскалыванию яйца при ударе его о стенки или дно кастрюли. Наконец, вы легко можете сами расколоть яйцо, неаккуратно опустив его в кастрюлю. Пока, казалось бы, соление воды не спасает ни от одного из перечисленных механизмов растрескивания яйца.

Один наш знакомый шестиклассник Вася, недавно узнавший о существовании закона Архимеда, сразу же без колебаний объяснил необходимость соления воды: «Если в кастрюлю с яйцом сыпать соль ложками, то при достаточном количестве соли, растворившейся в воде, яйцо всплывет, так как плотность соленой воды станет больше плотности яйца. После этого яйцо не будет стучаться о дно и не разобьется».

Коля, член кружка юных физиков, предложил свое объяснение: «Наличие соли в воде приводит к увеличению ее теплопроводности, а это способствует более спокойному кипению воды и равномерному обогреву яйца».

Увлеченная биологией Валя отнесла влияние соли совсем к другой области явлений: «Присутствие соли в воде приводит к лучшей сворачиваемости белка. Поэтому если яйцо и треснет, то в соленой воде быстро образуется пробка из свернувшегося белка, которая закупорит трещину, и яйцо не вытечет».

Как видите, объяснения самые разные. А вы что думаете по этому поводу?

...Итак, яйцо сварилось. Выньте его ложкой из кипятка и быстро, пока оно еще влажное, возьмите его в руки. Хотя яйцо и горячее, все же удержать его в руках можно. Однако как только яйцо высохнет (а это произойдет очень быстро), вы уже не сможете удержать его в руке — очень горячо. С чем связано это явление?

Ответив на предыдущий вопрос, попытайтесь яйцо очистить. Вы увидите, что скорлупа накрепко прилипла и вырывается только вместе с кусками белка. Этого можно было бы избежать, если бы вы сразу из кипятка опустили яйцо в холодную воду, после чего оно легко очищается. Дело тут заключается в том, что белок при охлаждении сжимается сильнее, чем скорлупа, вследствие чего он сам отделяется от нее.

...Пока мы видели, как в свойствах куриного яйца проявляются



законы механики твердых тел и жидкостей, а также законы тепловых явлений. А какие электрические явления можно наблюдать с помощью яйца?

Яйцо — диэлектрик. Именно это свойство яичной скорлупы и использовал Майкл Фарадей для демонстрации явления электризации.

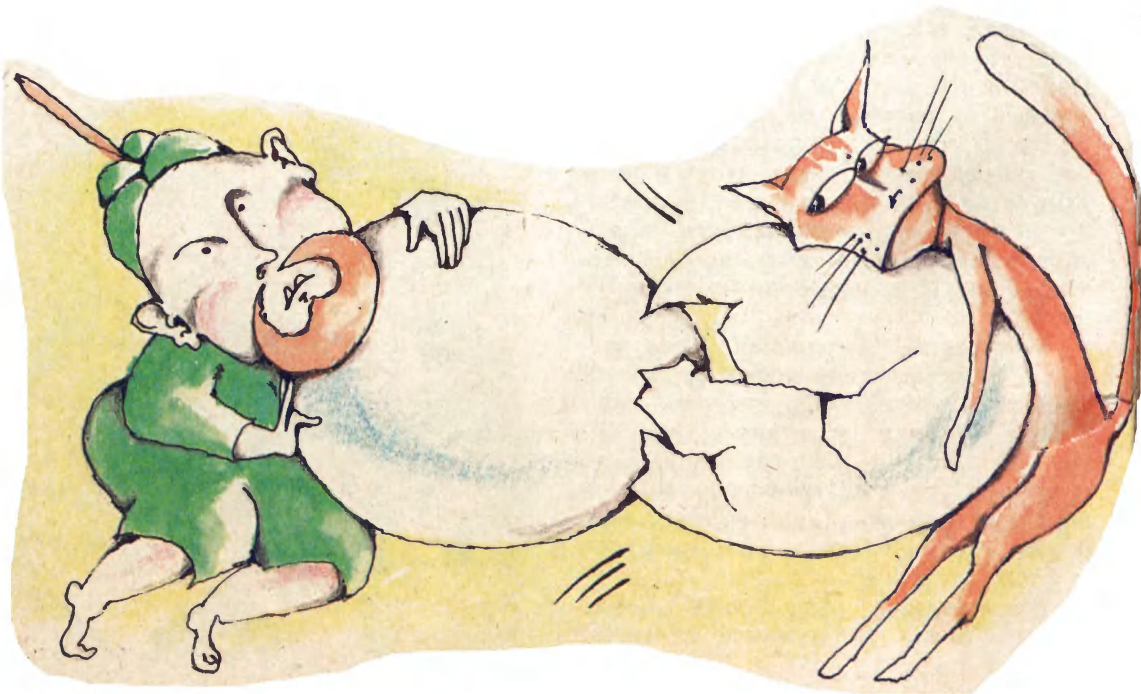
Возьмите сырое яйцо и проколите иглой в нем две дырочки. Дуя в одну из них, вы можете вылить все содержимое яйца и у вас в руках останется целая пустая скорлупа. Поднесите теперь к ней наэлектризованную эбонитовую палочку или обыкновенную пластмассовую расческу, которой вы только что причесались. Теперь, куда бы вы ни перемещали палочку или расческу, скорлупа, как собачонка на привязи, неотступно будет следовать за ними.

...Можно, не разбивая яйца, узнать — свежее оно или нет? Можно. Опустите сырое яйцо в воду. Если

яйцо тонет — оно свежее, если всплывает — испортившееся. Дело в том, что в несвежем яйце происходят процессы разложения белка и желтка. Эти процессы сопровождаются выделением газов, которые «улетучиваются» сквозь мельчайшие поры в скорлупе. Поэтому плотность яйца уменьшается.

Но ведь не придешь же в магазин со своей кастрюлей проверять, свежие яйца или нет?! Можно поступить проще: посмотрите яйцо «на просвет»; если оно просвечивает — значит, свежее, если же оно темное — значит, несвежее. Сероводород, выделяющийся в испорченном яйце, уменьшает его прозрачность.

Пытливому и наблюдательному человеку в самых простых вещах может открыться много новых и сложных явлений. Поэтому почаще удивляйтесь окружающему вас миру, задавайте вопросы и стремитесь прежде всего сами отыскивать ответы.



О ВСЕМИРНОМ ТЯГОТЕНИИ, ПРИЛИВАХ И ОТЛИВАХ

Н. А. Родина



В одной из книг, посвященных путешествиям, описано такое грандиозное явление: в часы приливов в лагуну одного из островов Альдабра (эти острова лежат в заливе Индийского океана у восточных берегов Африки) устремляются мощные потоки воды; в проливе, соединяющем лагуну с океаном, скорость течения достигает 25 км/ч. В часы отливов вода устремляется назад, в океан, дно лагуны обнажается почти на две трети, и на отмелях бродят тысячи птиц, выскливающих добычу.

Какие же огромные силы «выплескивают» воду из лагуны в часы отлива и поднимают ее во время прилива? Это — силы тяготения.

Часто говорят, что великий Исаак Ньютон пришел к мысли о существовании сил притяжения между всеми телами природы, наблюдая падение яблока на Землю. Но открытие и изучение силы тяготения имеет сложную историю.

Еще ученые первых греческих школ (V—IV века до н. э.) утверждали, что «подобное стремится соединиться с подобным». В течение всего средневековья эта идея поддерживалась аналогией с притяжением магнитов.

Много замечательных имен мы встретим, изучая историю становления учения о всемирном тяготении. Это и Тихо Браге, в течение двадцати лет наблюдавший планеты Солнечной системы и оставивший многочисленные точные данные об их движении, и Иоганн Кеплер, установивший на основе этих данных законы движения планет, и Галилео Гали-

лей, открывший спутники Юпитера, и многие другие. Но мы обратимся к работам Ньютона, которому принадлежит открытие закона всемирного тяготения.

«Лабораторией» для Ньютона служил космос, телами, с которыми он проводил «опыты», — Солнце и планеты Солнечной системы. Изучая данные о движении планет, он пришел к выводу, что во всех случаях тело, находящееся в центре (Солнце по отношению к планетам и планеты по отношению к своим спутникам), действует на обращающееся вокруг него тело с некоторой силой, которая и удерживает тело на орбите. Очень важным, решающим для установления закона всемирного тяготения был сделанный им вывод: сила, удерживающая небесное тело на орбите, обратно пропорциональна квадрату расстояния от центрального тела.

Следующее положение, установленное Ньютоном, гласит: «Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из тел».

Итак, все тела притягиваются друг к другу. Но если тяготение — свойство всех тел, то почему в нашей обыденной жизни мы замечаем только одно его проявление — притяжение тел Землей (и замечаем остро, когда несем тяжелый груз!)? Почему, сидя за партой рядом с товарищем, мы не ощущаем взаимного притяжения?

На это отвечает Ньютон: «Если кто возразит, что все тела, находящиеся у нас, по этому закону должны бы тяготеть друг к другу, тогда как такого рода тяготение совершенно не ощущается, то я на это отвечу, что тяготение к этим телам, будучи во столько же раз меньше тяготения к Земле, во сколько раз масса тела меньше массы всей Земли, окажется гораздо меньше такого, которое могло бы быть ощущаемо».

Оказывается, сила, с которой притягивают друг друга два человека, находящиеся на расстоянии в один метр (например, сидящие за одним столом), $\approx 0,00000025$ Н.

Значит, «титанические» силы, в одном случае удерживающие планеты на орбитах, могут быть в другом случае неощутимо малыми.



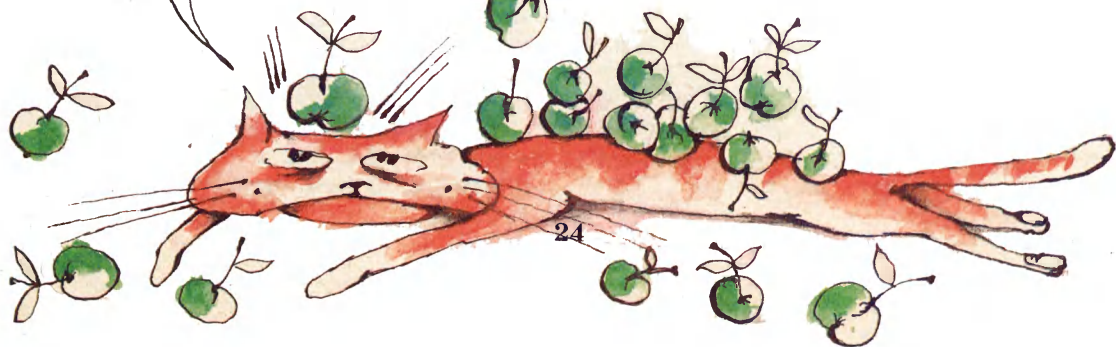
Закон всемирного тяготения сыграл огромную роль в развитии науки и техники. С его помощью были открыты две планеты Солнечной системы — Нептун и Плутон, его используют при расчете скоростей, необходимых для запуска космических кораблей и спутников, расчете их траекторий, для осуществления точной посадки автоматических станций на другие планеты...

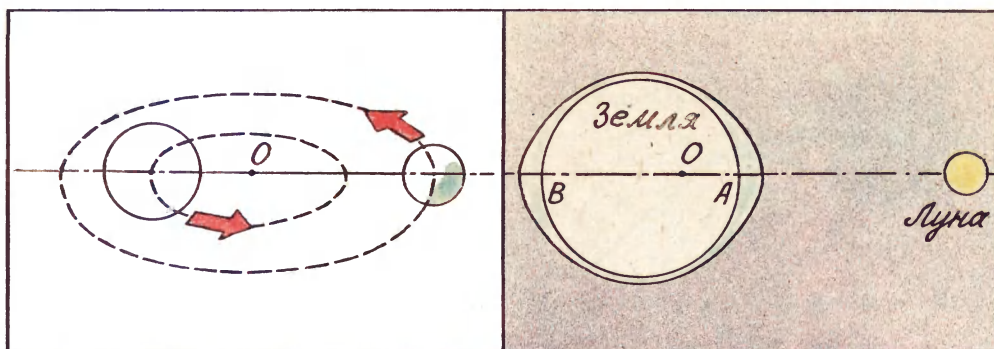
Но вернемся к лагуне на островах Альдабра, к приливам и отливам.

Причина возникновения приливов и отливов — всемирное тяготение, а «главный виновник» этого явления — наш спутник Луна.

Будем считать, что вода распределена по Земле тонким слоем. Так как сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, вода, находящаяся вблизи точки А (см. рисунок), притягивается Луной сильнее, чем вода, находящаяся вблизи точки В. Казалось бы, в результате этого вода должна перетечь на «лунную» сторону Земли, где образуется водяной горб. Так как Земля вращается вокруг своей оси, в каждом месте вода будет раз в сутки подниматься (прилив) и опускаться (отлив). Однако в действительности и приливы, и отливы происходят два раза в сутки. Почему же это так?

Причина в том, что Земля и Луна не неподвижны друг относительно друга. Представьте себе два шарика — тяжелый и легкий, — соединенные нитью и лежащие на гладкой горизонтальной поверхности. Легкий шарик можно привести во вращение вокруг тяжелого. Однако тяжелый шарик при этом не останется на месте — его центр тоже будет двигаться по окружности, правда, небольшого радиуса (см. рисунок). Неподвижной остается только некоторая точка на линии вдоль натянутой нити, расположенная вблизи тя-





желого шарика (ее называют центром масс системы). Вокруг этой точки (центра масс) и происходит вращение как тяжелого, так и легкого шарика.

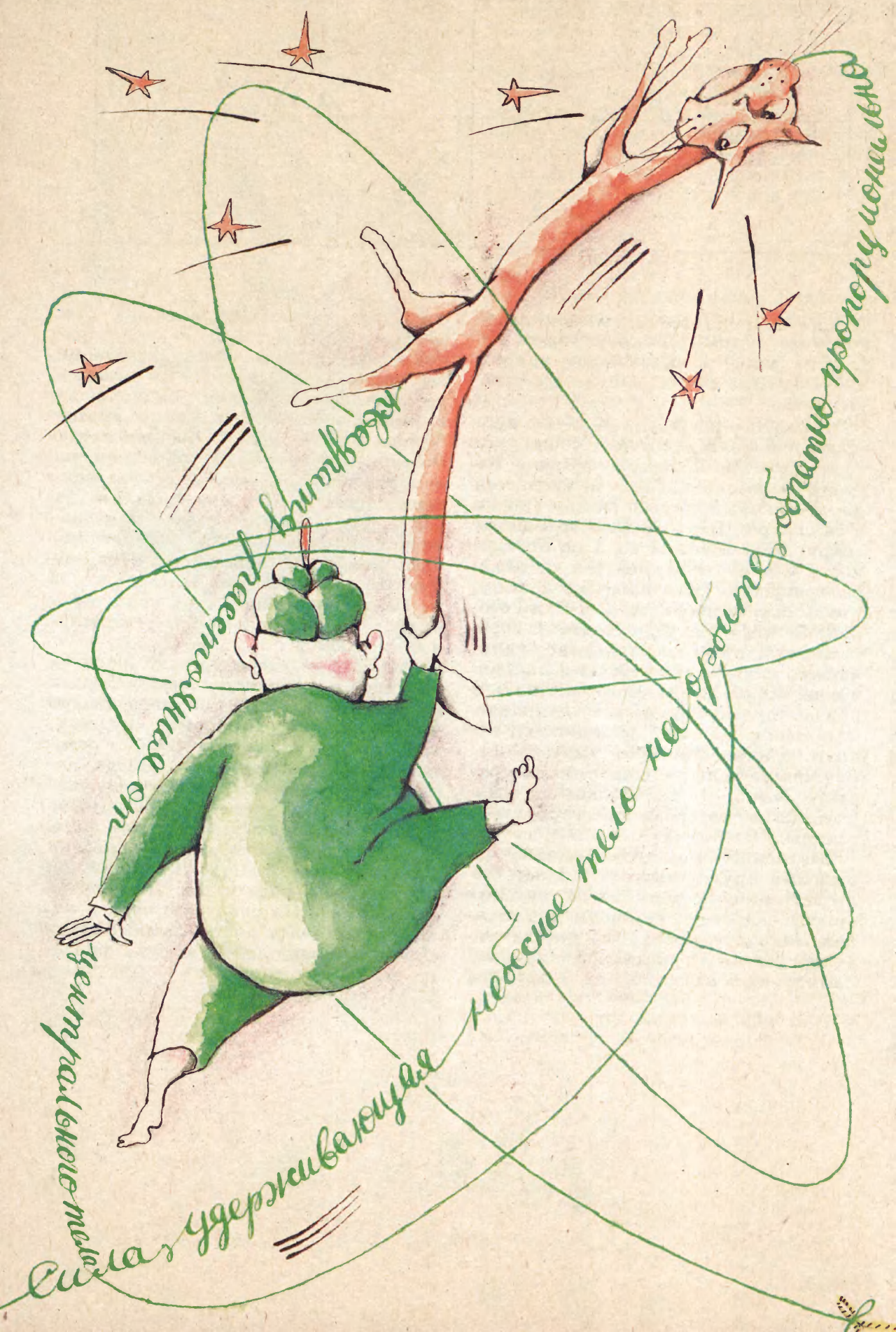
Точно так же Земля и Луна вращаются вокруг некоторой точки, которая вследствие того, что Земля гораздо тяжелее Луны, оказывается даже лежащей внутри Земли (но не в ее центре). Центр Земли вращается вокруг этой точки, а вода на поверхности Земли отбрасывается от центра вращения. Это приводит к тому, что и на противоположной Луне стороне Земли образуется водяной горб. Поверхность океана принимает удлиненную форму, вытянутую в направлении Луны и (немного меньше) в прямо противоположном направлении, так как Земля вращается и вокруг собственной оси, «двугорбая» приливная волна «бежит» по поверхности Земли. В тех областях, которые оказываются между горбами, — отливы.

Изучение приливов связано со многими трудностями, и точной количественной теории этого явления до сих пор нет. Та очень упрощенная модель, которую мы рассматривали, далека от реальной картины. Земля, как известно, не шар, она

сплюснута у полюсов; вода не «размазана» ровным слоем по ее поверхности. Луна при своем движении по орбите оказывается на разных расстояниях от Земли. Свой вклад в приливообразующую силу вносит Солнце. А взаимное расположение Солнца, Земли и Луны периодически изменяется. Эти и многие другие факторы существенно сказываются на реальной картине образования и движения приливной волны и могут смещать положения водяных горбов, изменять их величину и т. п.

Но главное нам теперь ясно: причина приливов и отливов — всемирное тяготение.

Можно с уверенностью сказать, что еще в древности жрецы умели рассчитывать время приливов. Иначе как они могли бы творить «чудеса», которые описаны, например, в сказках Древнего Египта: «...Когда достигли суда канала «Двух рыб», увидели все, что отмели обнажились и дальше продвинуться невозможно. Тогда его величество фараон призвал Джеди и повелел... И Джеди начал произносить над водой магические заклинания. По слову его вода в канале поднялась и покрыла отмели слоем в четыре локтя. И суда фараона двинулись дальше...»



искусственно созданный

центрированное тело

сила, удерживающая

небесное тело на орбите

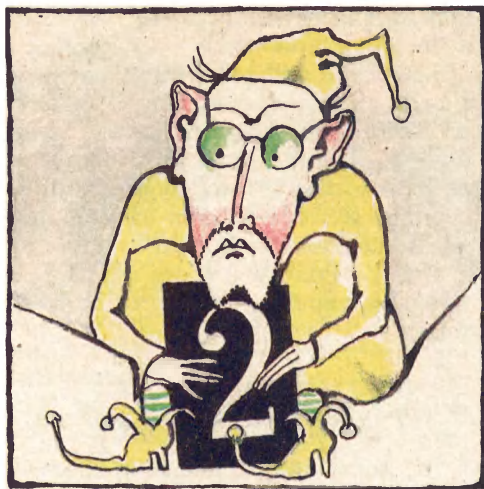
братно

пропорционально

2. БУДЕМ РАССУЖДАТЬ ЛОГИЧЕСКИ

МЕТОД ПЕРЕБОРА

Ф. А. Баргенов, А. П. Савин



Рассказывают, что однажды племянник Шерлока Холмса Джек обратился к своему знаменитому дяде с просьбой помочь в решении следующей задачи *): *Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб 56 коп. Сколько купили книг, если цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше чем альбомов?*

Прочтя условие, знаменитый сыщик прошел от стола к окну, затем вернулся к столу, постоял около него, уставившись в потолок, и, наконец, сказал: «Книг было куплено 8 штук».

«Как вы это установили?» — в один голос воскликнули Джек и присутствовавший при этом мистер Уотсон.

«О, это было совсем просто! — ответил Шерлок Холмс, усаживаясь в кресло. — Посмотрев на слова «книг купили на 6 больше, чем альбомов», я тут же понял, что книг купили не менее 7. Из того, что «цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома», я сделал вывод, что каждая книга стоит больше 1 рубля, а поскольку за них заплачено 10 руб 56 коп, книг купили не больше 10. Таким образом, все числа, большие 10, и все числа, меньшие 7, оказались вне подозрений. Проверив каждое из чисел 7, 8, 9, 10, я установил, что искомое число может быть только 8: остальные не делят 1056».

Метод перебора, которым воспользовался здесь Шерлок Холмс, видимо, является древнейшим из методов решения задач. Долгое время его относили к методам «второго сорта», «переборные» решения считались некрасивыми. Однако в последние годы метод перебора применяется все чаще и чаще в задачах, где искомая величина принимает только целочисленные значения.

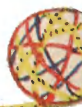
Перебор ведет ЭВМ

Известно много серьезных задач, которые математики не могут решать иначе, чем методом перебора. Правда, при этом перебор производит электронная вычислительная машина (ЭВМ), а математик лишь инструктирует ее, как этот перебор нужно сделать. Известный американский математик С. Голомб пишет по этому поводу *): «В отличие от человека, машина, решая задачи, производит однообразные вычисления, которые кажутся нам столь скучными, с невообразимой быстротой. Но вместе с тем она не заметит способа упростить или улучшить решение, если этот способ не будет заранее учтен программистом, составляющим детальные инструкции для работы ЭВМ».

Тем не менее в последние годы рост быстродействия и объема памяти компьютеров, их большая доступность и дешевизна позволяют все чаще использовать их для решения перебор-

*) В такой формулировке задача в действительности предлагалась на приемных экзаменах по математике на физическом факультете МГУ (1968 г.).

*) Голомб С. В. Полимино: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.



ных задач. Так, знаменитая «задача о четырех красках» (Всякую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны одинакового цвета не имели больших участков границы?) была решена очень хитрым перебором лишь при помощи ЭВМ. Недавно одна из наиболее известных задач о полимино из книги С. Голомба тоже была решена методом перебора с участием компьютера.

Турист укладывает рюкзак

К числу задач, решаемых методом перебора, относится так называемая «задача об укладке рюкзака»: Уложить в рюкзак предметы из заданного набора так, чтобы их суммарная масса была наибольшей (и суммарный объем не превосходил объема рюкзака).

В такой постановке задача выглядит игрушечной, но замените «рюкзак» на «отсек в трюме теплохода» и вы поймете, что эта задача имеет существенное народнохозяйственное значение.

Коммивояжер отправляется в путь

Другой, широко известной задачей, решаемой перебором вариантов, является «задача коммивояжера»^{*)}: Как объехать несколько городов, между каждыми двумя из которых имеется железнодорожное сообщение, затратив как можно меньше времени, если задан город, в котором начинается и кончается путь?

Уже для пяти городов количество вариантов равно 24, для шести городов их 120, для семи — 720, для десяти — 362880. Чтобы избежать полного перебора, математики придумали различные ухищрения^{**)}. Делается это не зря — решение подобной задачи необходимо для нахождения наилучшего маршрута для фургона, развозящего журналы и газеты по киоскам, автобуса, подбирающего сельских жителей на работу, и т. п.

^{*)} Коммивояжер — путешествующий представитель торговой фирмы.

^{**)} См., например, Квант, 1978, № 6, с. 11.

Сократим перебор

Для решения подобных задач были созданы методы, сокращающие перебор вариантов. Они составляют новую математическую науку, которая носит название «целочисленное программирование».

Некоторое представление о возможностях сокращения перебора может дать решение такой задачи: Известно, что $\sqrt[3]{****3}$ есть натуральное число. Найдите его.

Первое, что приходит в голову, — это перебирать пятизначные числа, оканчивающиеся на 3, и смотреть, нет ли среди них точных кубов: 10003, 10013, 10023, ... Но когда еще мы доберемся до 99993, да и как узнать, является данное число кубом или нет?

Лучше будем возводить числа в куб и посмотрим, какие из них будут пятизначными и оканчивающимися на 3. Получим

$$1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27,$$

$$4^3 = 64, 5^3 = 125, 6^3 = 216, 7^3 = 343,$$

$$8^3 = 512, 9^3 = 729, 10^3 = 1000.$$

Так дело тоже не пойдет. Зачем нам нужны кубы маленьких чисел? Посмотрим, чему равно наименьшее число x , куб которого является пятизначным числом. Оно не меньше чем $\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10}$, но $\sqrt[3]{10}$ больше 2, так как $2^3 = 8$; поэтому x больше 20. Оценим искомое число сверху, то есть посмотрим, какого числа оно не может превышать. Такое число, очевидно, равно $\sqrt[3]{100000} = 10\sqrt[3]{100}$. Но $\sqrt[3]{100}$ меньше 5, так как $5^3 = 125$. Значит, нужно перебирать числа от 21 до 49.

Посмотрим, не поможет ли нам сократить перебор то, что число под радикалом оканчивается на 3. Изучим выписанные нами кубы первых десяти натуральных чисел. Из них на 3 оканчивается лишь 7^3 . Если теперь немножко подумать, то нетрудно сообразить, что куб натурального числа будет оканчиваться на 3 в том и только в том случае, если само число оканчивается на 7.

Теперь нам остались для перебора лишь три числа: 27, 37 и 47: $27^3 = 19683$, $37^3 = 50653$, $47^3 = 103823$, но последнее число уже шестизначное, поэтому остаются лишь числа 27 и 37.

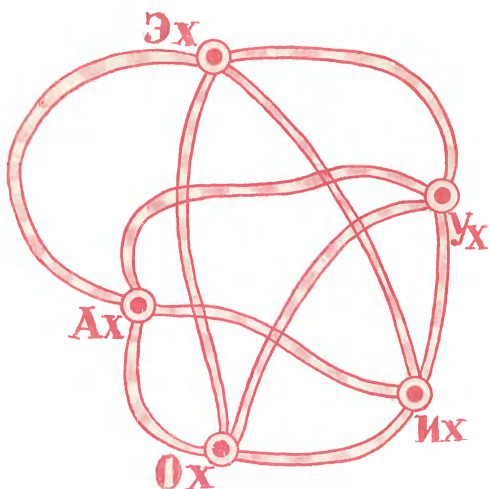
У п р а ж н е н и я

1. Решите задачу об укладке рюкзака для рюкзака объемом 100 дм^3 и предметов, указанных в таблице.

Т а б л и ц а

Предмет	Масса, кг	Объем, дм^3
Палатка	20	60
Спальный мешок	5	55
Одеяло	8	32
Радиоприемник	2	20
Кулек с едой	10	8
Мяч	0,5	10
Топор	3	2

2. На рисунке показана карта местности, на которой расположены пять городов: Ax , Ox , $Эx$, $Уx$ и $Иx$,



а в таблице указаны расстояния между ними по железной дороге. Найдите кратчайший путь коммивояжера, который должен выехать из города $Уx$, объехать остальные города и вернуться в $Уx$.

Т а б л и ц а

	Ax	$Иx$	Ox	$Уx$	$Эx$
Ax	0	60	40	50	20
$Иx$	60	0	30	35	45
Ox	40	30	0	55	50
$Уx$	50	35	55	0	20
$Эx$	20	45	50	20	0

3. В составлении 40 задач (для школьников) приняли участие 30 сту-

дентов (пединститута) со всех пяти курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые студенты разных курсов придумали разное число задач. Сколько сту-

дентов придумало по одной задаче?

4. Сколькими нулями может оканчиваться число $9^n + 1$?

5. В буфете продавались пирожки по 5 коп, бублики по 6 коп, булки по 7 коп, слойки по 8 коп и коржики по 10 коп. Группа ребят купила на рубль 14 изделий разных видов. Если взять по одному представителю каждого купленного вида, то их суммарная цена будет равна 21 коп. Сколько и каких изделий было куплено, если дополнительно известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено поровну?

6. Найдите два целых положительных числа, разность между квадратами которых равна 455.

7. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?



**«ВСЕ»,
«НЕКОТОРЫЕ»
И
ОТРИЦАНИЕ**

А. И. Орлов

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим футбольной команды нашего двора.

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете! — воскликнул Алик обиженно. — Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся, — футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так считают в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Редьярда Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда!..»

— Это кто же обезьяна?! — возмутился Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля — шар, а в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке... Так почему же все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот Сережа Кукушкин. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенные и чернявые», — только потому, что так выглядел единственный англичанин,

с которым он встречался. И ты, и этот француз нарушаете законы логики.

Алик задумался, и я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю.

— В одном городе я видел на доме табличку: «В нашем доме нет двоечников». На соседнем доме такой таблички не было. Как по-твоему, Алик, значит ли это, что все школьники в соседнем доме были двоечниками?

— Н-нет, — пробормотал Алик неуверенно. — Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники... Хотя бы один двоечник... А может быть, и все там учатся на двойки! Нет, не знаю, я ведь не был там!

— А что же означает такая фраза: «Неверно, что среди ребят есть двоечники»?

— Это как в первом доме — все учатся без двоек.

— Значит одно из двух, — сказал я удовлетворенно. — Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

И тут выяснилось, что Алик может, подумавши, рассуждать правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все, — есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

— Но даже в твоём классе, Алик, я знаю троих отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда показывает твой пример с Сережей Кукушкиным? Алик задумывается.

— Что не все хоккеисты хорошо учатся...

Итак, попробовав рассуждать логично, Алик сам пришел к правильному выводу.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (то есть в небольшом ящике) могут лежать, скажем, белые и красные шары. Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру,

красным. Его кладут обратно в урну. Что можно сказать о цвете шаров, лежащих в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле это не верно: можно утверждать лишь, что не к о т о р ы е (не обязательно все) шары красные. Могут быть и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди белых.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно? — «Некоторые (по крайней мере один) шары — не белые, то есть красные».

Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений 1—6 неверно. Сформулируйте верные утверждения.

1. Все шары в урне красные.
2. Некоторые шары в урне красные.
3. Некоторые шары в урне белые.
4. Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.
5. Все ученики класса были на собрании.
6. Некоторые девочки были на собрании.

А теперь — о б щ а я с х е м а решения подобных задач — наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или

несколько книг, или все ученики какого-то класса и т. д.). Обозначим его *М*. Каждый из элементов множества *М* может обладать, а может и не обладать некоторым интересующим нас свойством, которое обозначим *А*. Например, шар в урне может быть красным, а может и не быть (здесь *А* — свойство «быть красным»); хоккеист — быть или не быть двоечником.

Закон такой: *верно либо утверждение, либо его отрицание*. Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется *законом исключенного третьего*.) То есть каждое утверждение, которое мы используем, либо верно, либо неверно (и тогда верно его отрицание).

Например, либо все хоккеисты плохо учатся (обладают свойством *А*), либо, если это неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (не обладает свойством *А*).

Итак, вот наша схема.

У Т В Е Р Ж Д Е Н И Е

1. ВСЕ ПРЕДМЕТЫ ИЗ *М* ОБЛАДАЮТ СВОЙСТВОМ *А*.
2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДМЕТЫ ИЗ *М* ОБЛАДАЮТ СВОЙСТВОМ *А*.

Е Г О О Т Р И Ц А Н И Е

1. ХОТЯ БЫ ОДИН ПРЕДМЕТ ИЗ *М* НЕ ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ *А*.
2. ВСЕ ПРЕДМЕТЫ ИЗ *М* НЕ ОБЛАДАЮТ СВОЙСТВОМ *А*.

Обратите внимание на то, что утверждения «некоторые предметы обладают свойством *А*» и «хотя бы один предмет (а может быть, и все) обладают свойством *А*» означают в нашей схеме одно и то же.

Одну и ту же мысль можно выразить разными словами. Вот второй вариант схемы, полностью совпадающий по смыслу с первым.

У Т В Е Р Ж Д Е Н И Е

1. ЛЮБОЙ ПРЕДМЕТ ИЗ *М* ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ *А*.
2. СУЩЕСТВУЕТ ПРЕДМЕТ ИЗ *М*, ОБЛАДАЮЩИЙ СВОЙСТВОМ *А*.

Е Г О О Т Р И Ц А Н И Е

1. СУЩЕСТВУЕТ ПРЕДМЕТ ИЗ *М*, НЕ ОБЛАДАЮЩИЙ СВОЙСТВОМ *А*.
2. ЛЮБОЙ ПРЕДМЕТ ИЗ *М* НЕ ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ *А*.



Комбинируя первый вариант схемы со вторым, можно получить еще несколько эквивалентных формулировок.

У п р а ж н е н и я

Постройте отрицания следующих утверждений.

7. Все углы данного шестиугольника тупые.

8. Для любого x из множества M выполнено неравенство: $x^2 > 4$.

9. Некоторые люди — дети.

10. По крайней мере для одного x из множества M будет $x^2 - 2x + 1 = 0$.

11. Все мужчины выше двух метров.

12. Все простые числа — нечетные.

13. Для любого простого числа p число $2^p - 1$ тоже простое.

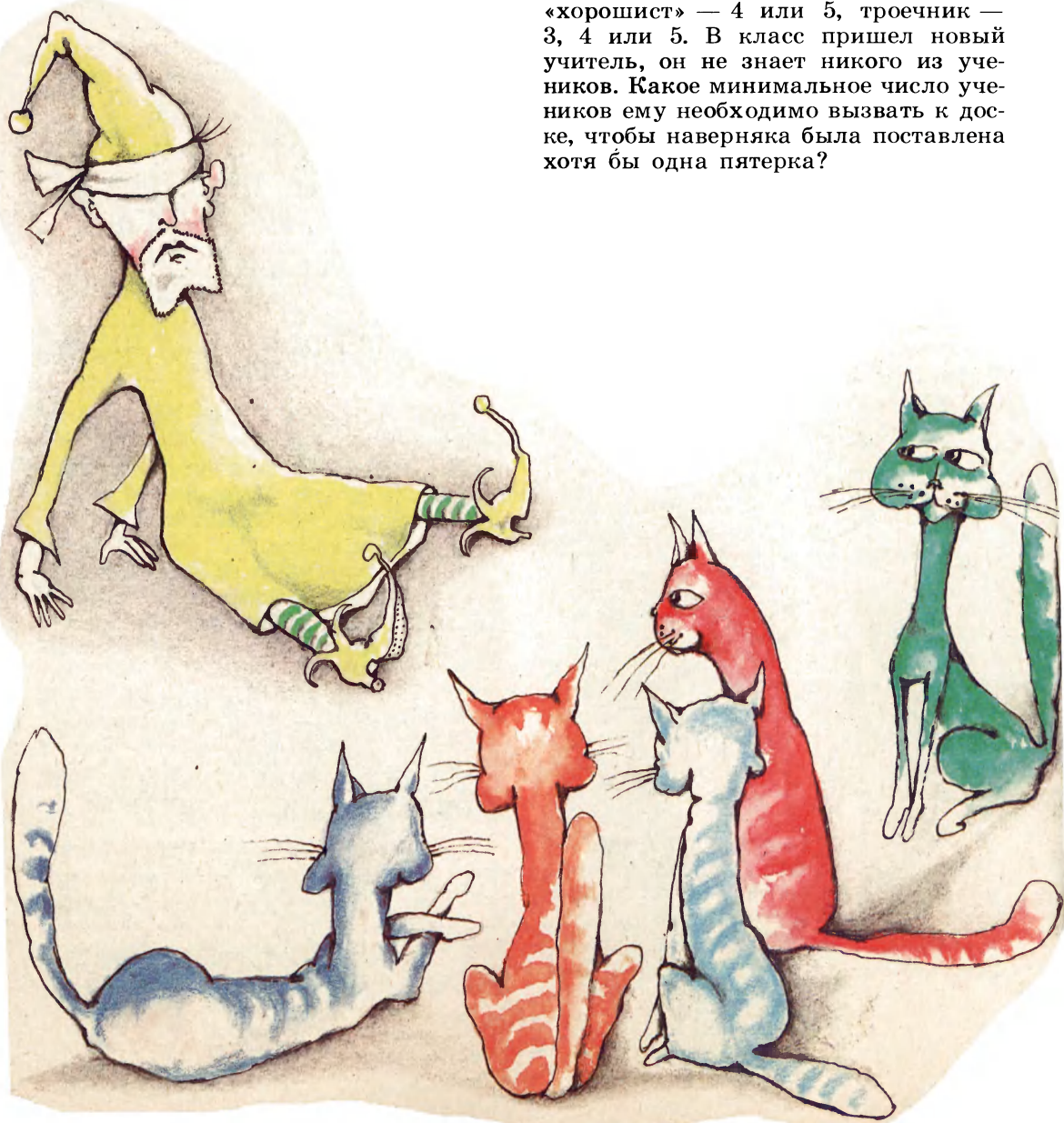
Вернемся к урне, в которой лежат шары, неразличимые на ощупь. Шары могут быть белого, красного, синего, черного цветов.

14. Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?

15. Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?

16. В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько шаров надо вынуть из урны (вынутые обратно не кладут), чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

17. В классе 5 отличников, 20 «хорошистов» и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, «хорошист» — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Какое минимальное число учеников ему необходимо вызвать к доске, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?



О ПОЛЬЗЕ НЕЛЕПОСТЕЙ

Ф. А. Бартев, И. Л. Никольская

Как-то раз мама с Катей ушли в гости, а Петя, предвкушая приятный вечер, полез на верхнюю полку за томиком увлекательнейших историй о Шерлоке Холмсе. Доставая книгу, он нечаянно смахнул с полки вазочку, которая разбилась вдребезги. Хоршее настроение Пети было несколько омрачено, но, решив не расстраиваться заранее, он смел черепки в угол и уютно устроился с книгой на диване. Рядом примостился Дружок. Едва раскрыв книгу, Петя тотчас же забыл обо всем на свете и с головой погрузился в мир загадочных преступлений, которые так ловко распутывал Шерлок Холмс с помощью своего дедуктивного метода. К действительности его вернул возмущенный возглас Кати:

— Мама, смотри, Петяка разбил вазочку, которую я тебе подарила!

— А ты видела? — по привычке запротестовал Петя. — Докажи, что это я!

— Что же тут доказывать? — пожалала плечами Катя. — Дома были только ты и Дружок. Допустим, что не ты разбил вазочку; значит ее разбил Дружок. Но не станешь же ты утверждать, что Дружок смог добраться до верхней полки. Это было бы нелепо: Дружок все-таки собака, а не кошка. Значит, вазочку разбил ты, больше некому.

— Да, — подумал Петя, — с ней не поспоришь, логика — как у Шерлока Холмса; да и спорить нечего — вазочку действительно разбил я. Пойду-ка к Мите, спрошу, что задано по математике.

У Мити он узнал, что по геометрии им задали теорему *Две прямые име-*

ют не более одной общей точки, доказательство которой Митя уже разобрал и выучил.

— Расскажи, — попросил Петя (чтение учебника геометрии, которую они только начали изучать, казалось ему делом трудным и скучным).

— Пожалуйста, — согласился Митя. — Допустим, что утверждение неверно; тогда...

— Постой, постой, — прервал его Петя. — Дальше я сам расскажу. Если неверно, что две прямые имеют не более одной общей точки, значит они имеют более одной общей точки, то есть две или три, а может, и больше. Но тогда получится, что две точки соединяют две прямые. А этого не может быть — мы уже знаем, что через две точки проходит одна-единственная прямая. Значит, две прямые не могут иметь более одной общей точки, то есть общих точек у них не более одной.

— Ну, ты молодец, — удивился Митя. — Где это ты так насобачился?

— Именно «насобачился», — засмеялся Петя. — Только что Катяка таким же способом доказала, что вазочку разбил я, а не собака.

— Каким это способом? — заинтересовался Митя. — В чем он состоит? И вообще, что общего между доказательством геометрической теоремы и следствием по делу о разбитой вазочке?

Петя немного растерялся, но только на секунду. Воодушевленный успехом и похвалой друга, он стал думать вслух:

— В обоих случаях доказывалось некоторое утверждение P (в первом случае — *Вазочку разбил Петя*, во втором — *Две прямые имеют не более одной общей точки*);

— доказательство начиналось с того, что допускалась истинность *не P* (отрицания предложения P);

— допущение истинности *не P* в обоих случаях привело к нелепости (в первом — к тому, что собака может вскарабкаться на верхнюю полку, а это противоречит нашим представлениям о способностях и привычках собак; во втором — к тому, что через две точки можно провести две прямые, а это противоречит известной аксиоме).

— Ну и что? — спросил Митя. — Почему же этим доказано P ?

— А вот почему: раз допущение, что *не Р* истинно, привело к нелепости, значит *не Р* истинным быть не может. Но если *не Р* ложно, то *Р* истинно!

— Все правильно,— сказал Митя.— Если отрицание предложения *Р* ложно, то само предложение *Р* истинно. Поэтому вместо того, чтобы доказывать истинность *Р*, можно доказывать ложность *не Р*, а уж отсюда делать вывод об истинности *Р*.

— Можно-то можно,— заметил Петя,— да нужно ли? Не проще ли идти прямым путем? Вот так, например, как мы с Катей в контрольной по алгебре доказывали, что число 13 не является корнем уравнения $x^3 - 17x^2 + 119x - 1000 = 0$: подсчитали значение выражения в левой части уравнения при $x = 13$ и убедились, что оно не равно 0.

— И не лень вам было умножать и складывать? — усмехнулся Митя.— Ведь стоило только предположить, что 13 — корень этого уравнения, как сразу получился бы нелепый вывод: 1000 делится на 13 ($13^3 - 17 \cdot 13^2 + 119 \cdot 13 = 1000$). Следовательно,

13 — не корень данного уравнения.

— И что же,— осведомился Петя,— такой путь доказательства всегда короче прямого?

— Нет, не всегда,— ответил Митя,— но довольно часто. Попробуй, докажи, например, что в Москве есть люди с одинаковым количеством волос на голове (лысые не считаются). Не станешь же ты у всех подряд перебирать шевелюру по волоску. А вот если предположить, что таких людей нет, то, приняв во внимание, что в Москве живет около 8 миллионов жителей, а число волос на голове у человека не превосходит 500 000, мы придем к нелепому выводу: $500\,000 \geq 8 \cdot 10^6$. Следовательно, в Москве есть жители с одинаковым числом волос на голове.

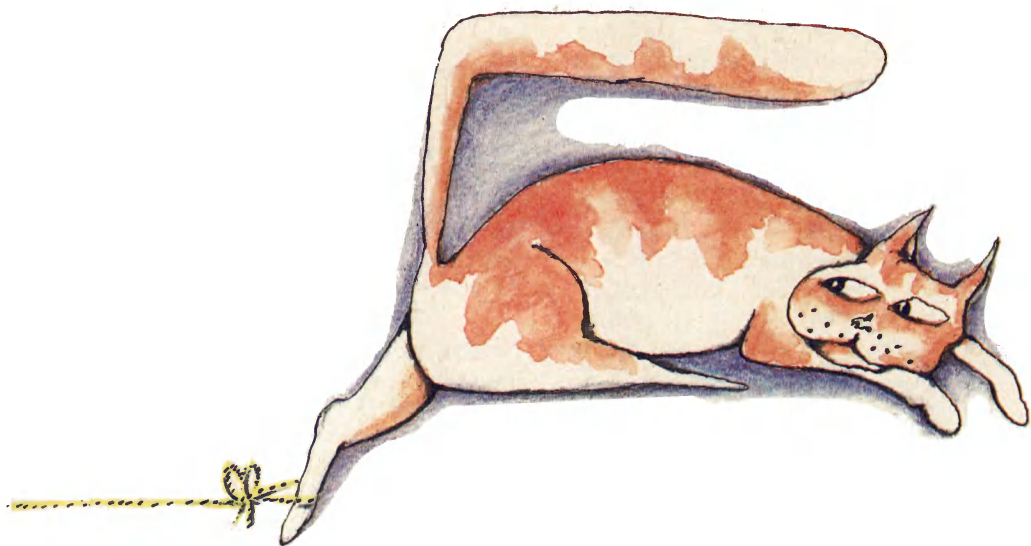
Доказательство утверждения *Р* путем доказательства ложности его отрицания *не Р* называется *косвенным доказательством*; называют его также *доказательством от противного*. А теперь попробуй, докажи от противного, что не существует наибольшего четного числа.

— Ну, что ж,— сказал Петя,— это не трудно. Допустим, что такое число *n* существует. Тогда всякое другое четное число должно быть меньше *n*. Однако, прибавив к числу *n* двойку, получим четное число $n + 2$, большее, чем *n*. Полученное противоречие доказывает, что предположение о существовании наибольшего четного числа

ложно; значит, наибольшего четного числа не существует.

— Знаешь,— сказал Митя,— еще в III веке до н. э. Евклид доказал, что не существует наибольшего простого числа. Предположив, что такое число p_n существует, он построил число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, где p_1, p_2, \dots — простые числа, предшествующие p_n ; p не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_n (в остатке всегда будет единица), а значит, либо оно само простое, либо делится на простое число q , большее, чем p_n . Полученное противоречие (p_n — наибольшее простое число и, одновременно, либо p , либо q — простое число, большее p_n) доказывает ложность сделанного допущения и, тем самым, истинность утверждения *Наибольшего простого числа не существует*.





Вскоре на уроке физики учитель рассказал ребятам, как Галилей логически доказал свою гипотезу о том, что в пустоте все тела падают одинаково быстро, и опроверг тем самым гипотезу Аристотеля, полагавшего, что тело падает тем быстрее, чем оно тяжелее.

— Допустим,— рассуждал Галилей,— что тяжелое ядро падает быстрее, чем легкое. Что будет, если связать эти два ядра вместе? С одной стороны — легкое ядро должно замедлять падение тяжелого, с другой же — скорость падения связанных ядер должна быть больше скорости падения тяжелого ядра. Полученное противоречие доказывает, что предположение о различии скоростей падения тяжелого и легкого ядер ложно. Следовательно, ядра должны падать с одинаковой скоростью.

— Значит, приведение к противоречию бывает полезно и в физике,— отметил про себя Петя.

Спустя некоторое время учительница русского языка попросила Петю доказать, что в предложении *Почти все пионеры нашего класса увлекаются спортом* слово *почти* — частица.

— Вот те на,— подумал Петя.— Я понимаю, *же* — частица, *ли* — частица, *бы* — частица, а *почти* — какая же это частица? Слово как слово. Впрочем, это, несомненно, служебная часть речи, то есть либо предлог, либо союз, либо междометие, либо частица. Допустим, что слово *почти* — не

частица; тогда оно — предлог или союз, или междометие. Но это слово не служит для связи слов или частей предложения; значит, оно — не предлог и не союз. Неверно и то, что слово *почти* — междометие: оно не выражает никаких чувств и не побуждает к действию. Следовательно, слово *почти* — частица, и я доказал это, рассуждая от противного. Учительница похвалила Петю за толковый ответ.

А вечером Петя прочитал в своей любимой книге о Шерлоке Холмсе «...отбросьте все невозможное, тогда то, что останется, и будет ответом, каким бы невероятным он не казался» и отметил с удовольствием, что получил пятерку, в точности следуя совету великого сыщика.

Как-то на уроке геометрии разбиралась теорема *Если две прямые параллельны одной и той же третьей прямой, то они параллельны*. Доказывалась эта теорема так. Предположим, что прямые *a* и *b*, параллельные прямой *c*, пересекаются в точке *M*. Тогда через точку *M* проходят две прямые, параллельные прямой *c*, что противоречит аксиоме *Через точку можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной*. Учительница сказала, что это — доказательство от противного.

— Эта теорема сформулирована в виде условного предложения *Если А, то В*,— сказал Митя, заметив недоумение Пети,— а отрицанием такого

предложения является предложение A и $(не B)$, то есть прямые a и b параллельны прямой c и пересекаются. Мы доказали, что утверждение A и $(не B)$ ложно, так как противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, Если A , то B истинно. Все правильно.

На уроке алгебры нужно было доказать утверждение Если положительное число n меньше 1, то $1/n > n$. Учительница назвала доказательством от противного такое рассуждение: допустим, что $1/n \leq n$; тогда $(1/n) - n \leq 0$; отсюда следует, что $(1 - n^2)/n \leq 0$, то есть $1 - n^2 \leq 0$, $1 \leq n^2$ и $n \geq 1$. Пете опять показалось, что это не совсем то, что он привык считать доказательством от противного, но Митя рассеял его сомнения.

— Посмотри, — сказал он, — мы предположили, что истинно отрицание исходного утверждения Положительное число n меньше 1 и $1/n \leq n$. Из этого предложения вытекает опровергающее его противоречие: $n < 1$ и $n \geq 1$ одновременно. Следовательно, исходное предложение истинно. Как видишь, это самое настоящее доказательство от противного. Но к этому вопросу можно подойти и иначе. Предложения Если A , то B и Если $(не B)$, то $(не A)$ равносильны, то есть при любых A и B они одновременно истинны, либо одновременно ложны. Значит, вместо того чтобы доказывать утверждение Если A , то B , можно доказать утверждение Если $(не B)$, то $(не A)$. Так мы, в сущности, и поступили, решая эту задачу. Понять, почему такая равносильность имеет место, поможет рисунок, из которого видно, что если из A следует B (множество истинности предложения A

есть подмножество множества истинности предложения B), то из $не B$ следует $не A$ (множество истинности предложения $не B$ есть подмножество множества истинности предложения $не A$). Верно и обратное. Равносильность предложений Если A , то B , и Если $(не B)$, то $(не A)$ называется в логике законом контрапозиции.

* * *

Итак, что мы знаем о косвенных доказательствах? Доказательство утверждения P от противного состоит, вообще говоря, в доказательстве ложности его отрицания $не P$. Ложность предложения $не P$ доказана, если из него выведено следствие, противоречащее предположению, истинность которого ранее установлена, либо если оно само имеет форму противоречия Q и $(не Q)$. Доказательство условного предложения Если A , то B можно заменить доказательством предложения Если $(не B)$, то $(не A)$.

Добавим к этому, что в основе всех форм доказательства от противного лежит закон исключенного третьего. Этот логический закон утверждает, что из двух высказываний P и $не P$ всегда либо первое истинно, а второе ложно, либо, наоборот, первое ложно, а второе истинно; никакой третьей возможности нет. Именно на основании этого закона мы из ложности $не P$ делаем вывод об истинности P .

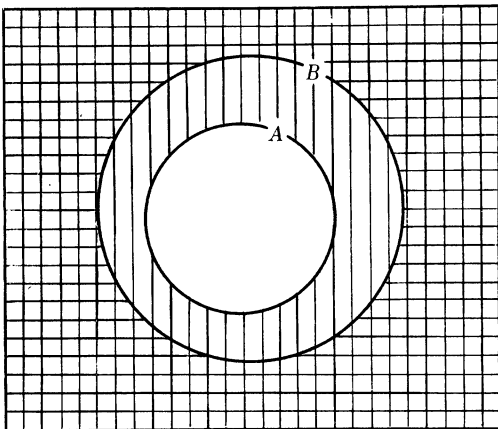
Как видите, в математике на каждом шагу используются законы логики, а, как сказано в книге А. Реньи «Трилогия о математике» (М.: Мир, 1980): «Тот, кто постиг искусство логического мышления в математике, может использовать его в любой области жизни». Для упражнения в этом искусстве предлагаем вам решить несколько задач.

У п р а ж н е н и я

1. Докажите, что при любом натуральном m равенство $m(m+1) = 27381$ неверно.

2. Докажите, что не существует треугольника а) с углами 40° , 60° , 70° ; б) со сторонами 7, 10, 18 см.

3. Докажите, что не существует такого числа, которое при делении



на 21 дает в остатке 1, а при делении на 14 дает в остатке 3.

4. Для натуральных m и n докажете следующее утверждение: а) если

m^2 нечетно, то m нечетно; б) если mn нечетно, то m нечетно и n нечетно.

5. Точки A , B и C лежат на одной прямой: $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Лежит ли точка C между точками A и B ? Ответ обосновать.

6. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую. Докажите.

7. Если функция f — возрастающая, то из $f(x_2) \leq f(x_1)$ следует $x_2 \leq x_1$. Докажите.

8. Является ли в предложении *Люблю грозу в начале мая слово грозу* подлежащим? Правильность ответа докажете от противного.

9. Сережа надумал соорудить во дворе песочницу для малышей и стал искать подходящие доски. Ему удалось найти четыре доски длиной по 1 м, две доски по 2 м и одну доску в 3 м. Можно ли всеми этими досками, не распиливая их, огородить прямоугольную песочницу?

10. Можно ли разменять монету в 20 копеек семью монетами достоинством 1, 3 и 5 копеек?



ДОКАЗАТЬ МОЖНО? — ДОКАЗАТЬ НЕЛЬЗЯ!

Е. Е. Семенов

— Пап, а пап! А белка кушает кедровые орешки?

— Да, доченька.

— А кедр — это такая травка?

— Ну что ты, Танюша!

Кедр — это дерево!

— Если бы моя белка была не кукольной, а настоящей, я взяла бы ее в лес, и если бы эта белка на какое-нибудь дерево запрыгнула, — значит, это кедр.

(Из разговора
маленькой Танюши)

Трудно сказать, с какого возраста мы начинаем заниматься доказательствами. Может, с того времени, когда начинаем слушать и понимать сказки, когда своих кукол превращаем в героев услышанных сказок, перемешивая детскую фантазию «со взрослой былью». Примером может служить только что приведенный разговор. Вы, наверное, заметили, что в разговоре маленькой Тани содержится (может быть, первое в ее жизни) доказательство. Смотрите, она считает, что:

- 1) белка кушает кедровые орехи;
- 2) кедр — это дерево;
- 3) белка влезла на данное дерево.

На этом основании Таня делает вывод, что данное дерево — кедр. Правда, Танин вывод ошибочен. Чтобы этот вывод был верен, нужно еще одно условие:

4) если дерево — не кедр, то белка на такое дерево не полезет (иначе: из всех деревьев белка влезет только на кедр).

Посмотрим, однако, на Танино доказательство с другой стороны. В ее распоряжении были три перечисленные условия. Можно ли на их основе,

не пользуясь никакими другими условиями, доказать полученный вывод? — Конечно, нет! А опровергнуть? — Тоже нет! Может оказаться, что дерево, на которое влезла белка, — кедр, и тогда вывод верен, но с таким же успехом белка может влезть на березу, и тогда вывод неверен. Математик сказал бы, что Танино заключение независимо от ее трех условий.

И все-таки... и в более старшем возрасте мы тоже иногда допускаем аналогичные ошибки. Сомневаетесь? Тогда послушайте историю, которая произошла с семиклассником Степой Мошкиным и его друзьями при изучении ими геометрии.

Степа и его друзья ищут доказательство

— Третье свойство расстояний подозрительно! — воскликнул Степа, просматривая старый учебник геометрии. — Почему оно дается без доказательства? В учебнике, по которому я занимаюсь, это свойство доказывается! Вот она, теорема 7.5: каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки. Это предложение и есть третье свойство расстояний. Правда, старый учебник написан по-другому, в нем другие аксиомы... Поэтому, видимо, такое доказательство, как в новом учебнике, для него не подходит... Однако, кажется, это свойство расстояний можно доказать с помощью первых двух! — глубокомысленно произнес Мошкин. — Если, к тому же, такое доказательство окажется простым, то я заменю им доказательство в моем учебнике! Вот тогда удивлю и класс, и Петра Ивановича!.. Ну да, конечно! Ведь если подумать, первое и второе свойства расстояний в нашем учебнике выполняются. И это становится ясным еще до доказательства теоремы!

На другой день доказательством третьего свойства расстояний с помощью первых двух свойств занимались все друзья Степы, увлеченные его идеей. Их усилия не были напрасными: вскоре были найдены сразу несколько доказательств.

Прежде всего сформулируем названные свойства.

1. Расстояние от точки A до точки B положительно, если они различны, и равно нулю, если они совпадают.

2. Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A .

3. Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

А теперь познакомьтесь с одним из доказательств Степы и его друзей.

Надо доказать, что для любых трех точек A, B, C выполняется такое неравенство: $AC \leq AB + BC$. Допустим, что это не так. Пусть

$$AC > AB + BC. \quad (*)$$

Так как A, B и C — любые три точки, то пусть, например, точка B совпадает с C , точка A отлична от B . Поскольку в этом случае $BC = 0$ (по свойству 1), то из $(*)$ получаем, что $AC > AB$. С другой стороны, поскольку точки B и C совпадают, $AC = AB$. Пришли к противоречию: $AC > AB$ и $AC = AB$. Следовательно, допущение, что $AC > AB + BC$, неверно. Остаётся, естественно, что $AC \leq AB + BC$, то есть свойство 3 выполняется!

Степа Мошкин и его друзья ликовали. Доказательство свойства 3 расстояний найдено! Причем это доказательство использует только свойство 1! Отсюда новая идея: а нельзя ли доказать и свойство 2 расстояний с помощью свойства 1! «Математическое общество» Степы Мошкина с удвоенной энергией принялось за работу. Неизвестно, когда и чем бы это все кончилось, если бы не Петр Иванович.

Доказательства не существует!

На очередном уроке геометрии Степа и его друзья познакомили с найденными доказательствами Петра Ивановича. Тот внимательно выслушал их и сказал:

— Знаете, в каждом из ваших доказательств содержится ошибка. Но самое главное не в этом. Я мог дать такой ответ, не знакомясь с вашими доказательствами. С помощью первых двух свойств расстояний третье свойство вы не докажете!

— Как! — воскликнул Степа. — Этого быть не может! А если бы доказательство было сделано другими?.. Ну, например, десятиклассниками?.. Или каким-нибудь ученым, академиком?!

— Никакой ученый, друзья, заниматься этим не станет, потому что



он наперед знает о невозможности такого доказательства. И десятиклассник не будет делать таких попыток, если он достаточно хорошо знает математику.

Все укоризненно посмотрели на Степа. Надо же было ему вовлечь их в это безнадежное дело. Столько времени затрачено! И вот такой печальный конец. Не могли догадаться обратиться сразу к Петру Ивановичу!

— Да вы не расстраивайтесь! — сказал Петр Иванович. — Вы не одиноким в своей «неудаче». Аксиому параллельности Евклида доказывали в течение двух тысяч лет многие известные и талантливые математики. Даже Николай Иванович Лобачевский пытался это сделать. И лишь в прошлом веке было установлено, что доказать эту аксиому на основе других аксиом Евклида невозможно. А теперь сравните несколько дней ваших трудов с трудом продолжительностью в две тысячи лет! Вы видите, насколько скромны ваши усилия по сравнению с усилиями многих математиков, отдавших на доказательство аксиомы параллельности всю свою жизнь?

Доказательство невозможно? — Почему?

— Но как, каким образом можно узнать, что доказательство невозможно? — заговорили сразу все ученики класса, даже те, кто не искал доказательства третьего свойства расстояний.

— Прежде всего, — начал Петр Иванович, — не считайте, что расстояние — это обязательно нечто, полученное с помощью масштабной линейки. Ведь в аксиомах расстояний об этом ничего не сказано! И почему бы не считать, что расстояние можно измерять, скажем, в градусах, с помощью транспортира? Разве аксиомы расстояния запрещают это делать? Да и вы нередко измеряете расстояние в минутах — от дома до школы 10 минут. Так вот, сейчас мы построим такую модель, в которой свойства 1 и 2 расстояний будут выполняться, а свойство 3 выполняться не будет.

Представьте себе такую фантастическую ситуацию. Город (плоскость) заселен крайне ленивыми существами. Они не ходят ни на работу, ни в кино, ни в гости друг к другу, они лишь звонят друг другу по телефону. Причем из точки A в точку B и из B в A можно дозвониться за 3 ми-

нуты. В любую другую точку из A и B можно дозвониться за 1 минуту. Из любой точки, отличной от A и B , в любую другую точку можно дозвониться тоже за 1 минуту. А из любой точки в нее саму можно дозвониться за нулевое время.

Для таких лентяев расстоянием от одной точки до другой является время, за которое можно дозвониться из первой точки во вторую.

Проверьте выполнение свойств расстояний в этом фантастическом городе. Видите? Первое и второе выполняются, а третье — нет. Например, $AB > AC + CB$, так как $AB = 3$, $AC + CB = 1 + 1 = 2$.

— Ну вот, а теперь можно сделать и вывод, — сказал учитель. — Что значит «доказать третье свойство расстояний с помощью первых двух свойств»?

— Это значит доказать, что если свойства 1 и 2 выполняются, то и свойство 3 будет выполняться, — ответил Степа сразу за всех.

— А в рассмотренной модели свойства 1 и 2 выполняются, а свойство 3 не выполняется. Значит, доказать свойство 3 с помощью свойств 1 и 2 невозможно! Свойство 3 независимо от свойств 1 и 2.

Новая модель

Вам, наверное, не терпится узнать, доказали ли Степа и его друзья второе свойство расстояний с помощью первого? И существует ли такое доказательство?

После полученного урока «математическое общество» Степы Мошкина стало действовать осматрительнее. Его члены поняли, что занятие математикой означает не только поиск доказательства, но и выяснение: а существует ли оно? Сначала ребята решили попытаться построить модель, в которой первое свойство расстояний выполнялось бы, а второе — нет. Удача означала бы, что доказательства второго свойства на основе первого не существует. И им повезло. Вот какую «телефонную» модель они построили: $AB = 2$, $BA = 1$, $AC = CA = BC = CB = 1$, очевидно, что свойство 1 расстояний для всех точек в такой модели выполняется. Однако для точек A и B свойство 2 не выполняется: $AB \neq BA$. Следовательно, свойство 2 расстояний независимо от свойства 1.

Эпилог

Вот так закончилась одна из историй, приключившихся с семиклассником Степой Мошкиным. Вы думаете, после нее он утомился? Ошибаетесь! Степа приготовил для вас задания!

У п р а ж н е н и я

1. Найдите ошибку в «доказательстве» свойства 3 расстояний.

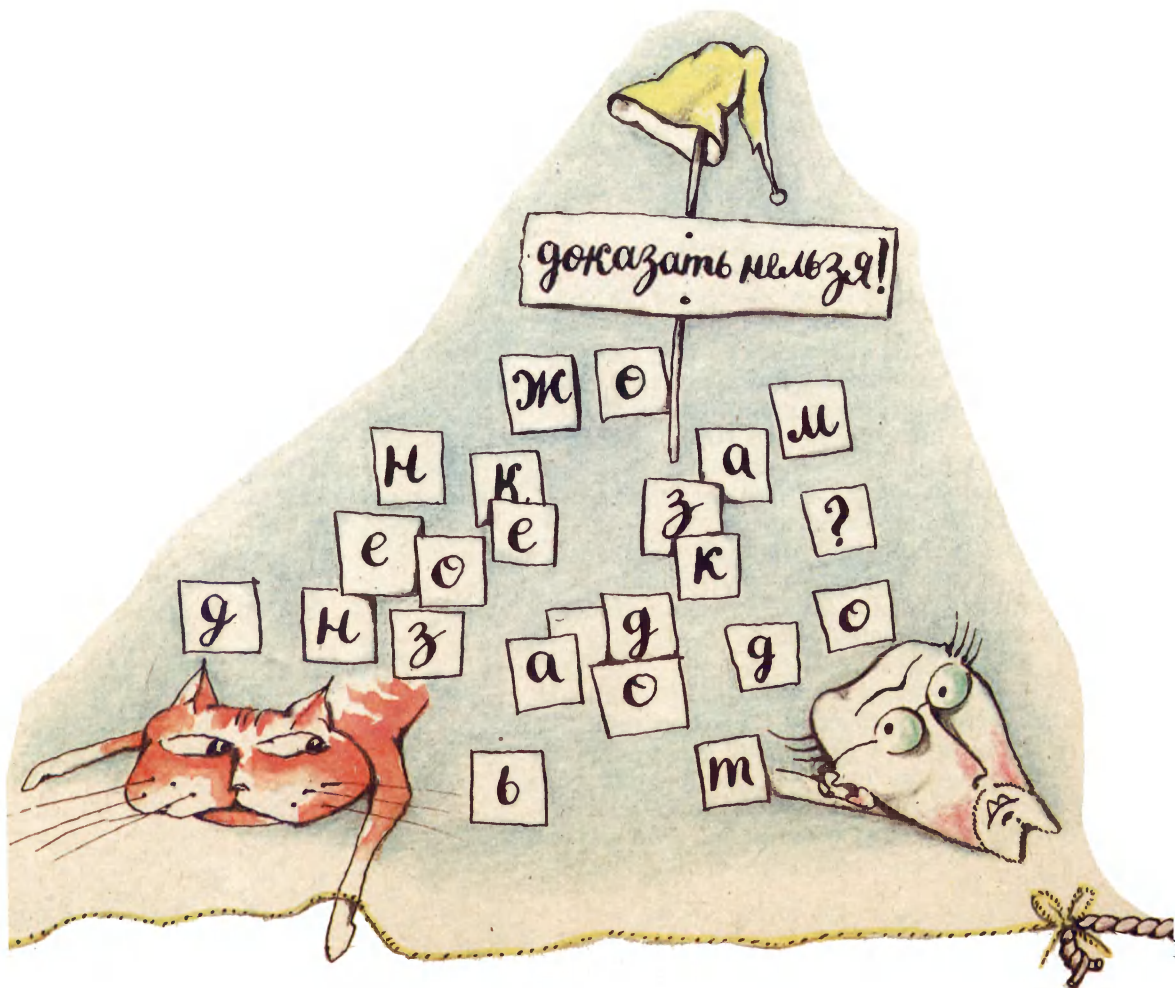
2. Выясните, выполняется ли свойство 3 расстояний в модели, построенной Степой и его друзьями.

3. Возьмите две различные точки A и B . Будем считать, что $AB = 1$, $BA = 3$. Расстояние между любыми другими несовпадающими точками считайте равным 1, между совпадающими — 0. Докажите с помощью этой

модели независимость свойств 2 и 3 расстояний от свойства 1.

4. Докажите путем построения соответствующей модели, что свойство 2 расстояний независимо от свойства 3.

5. Изобразите треугольник ABC такой, что $\angle C = 100^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. За расстояние между двумя вершинами треугольника примем градусную меру угла при третьей вершине: $AB = 100$, $AC = 50$, $BC = 30$. Расстояние между любыми другими различными точками будем считать равным 1, расстояние между совпадающими точками будем считать равным 0. Обоснуйте с помощью этой модели невозможность доказательства свойства 3 с помощью первых двух свойств расстояний.



3. ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ ЛИШЬ ЭПИЗОДИЧЕСКИ

НА ДАЧЕ

Ю. Г. Горст



В одно из майских воскресений семиклассники Коля и Петя приехали на пустующую в это время дачу Петиных родителей, чтобы подготовиться к последней контрольной работе по физике.

День был жаркий, и в комнате было душно.

— Знаешь что, — сказал Петя, — в такой жаре у меня мозги что-то плохо работают. Давай-ка включим холодильник и подождем, пока он немного остудит комнату.

Коля не возражал. Через час после включения холодильника, когда температура в комнате несколько понизилась, ребята взялись за учебники.

Однако долго работать им не пришлось. На этот раз взмолился Коля:

— Петя, я сегодня плохо позавтракал, и у меня так разыгрался аппетит, что физика не идет в голову. Не мешало бы нам слегка перекусить.

Петя осмотрел дачные запасы.

— Устраивай тебя яйца всмятку? — спросил он. (Коля кивком головы выразил свое согласие.) — Вот только ... нашел я две электроплитки, но ни на одной нет спирали. А, вот и несколько спиралей. Может быть, соединим последовательно две спирали и поставим их на одну плитку, чтобы быстрее закипела вода?

Коля задумался.

— По-моему, — произнес он, — вода закипит быстрее, если спираль не удлинить, а, наоборот, укоротить.

Разгорелся спор, и для его разрешения ребята поставили на одну из плиток удвоенную спираль, а на дру-

гую — полспирали. Затем налили в одинаковые кастрюли одинаковое количество воды и стали ждать, на какой плитке вода закипит раньше.

Прав оказался Коля. Сварив яйца и утолив голод, ребята возобновили свои занятия.

Когда наступили сумерки, Петя включил электрическую лампочку.

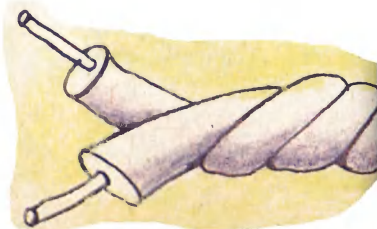
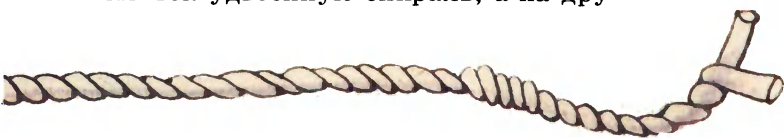
— Что-то освещение слабовато, — пожаловался Коля. — Наверное, лампочка малой мощности.

— 127 В, 60 Вт, — прочитал надпись на лампочке Петя. — Сейчас посмотрю в кладовой, не найдется ли чего-нибудь получше. Так эта лампочка на 40 Вт — она нам ни к чему, а вот эта, хотя и 60-ваттная, но зато на 220 В. Давай-ка включим ее: у нее хоть напряжение побольше.

Когда Петя вернул в патрон лампочку, в комнате стало значительно светлее, и ребята еще около часа просидели над книгами.

Возвращаясь домой, они чувствовали себя хорошо подготовленными к контрольной работе по теме «Электричество».

Какие противоречия физическим законам заметили вы в этом рассказе?





ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ... ТЕМПЕРАТУРА

В. В. Майер

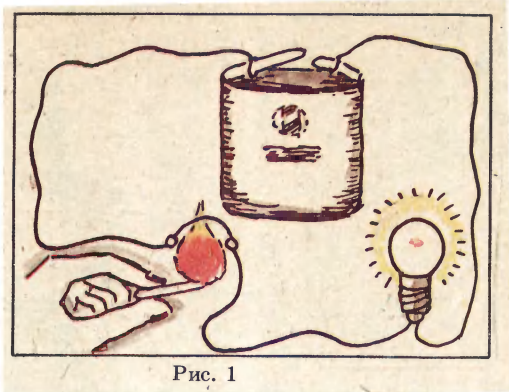


Рис. 1

Что такое проводники электричества? Какие проводники вы знаете? Что такое сопротивление проводника? Почему проводник обладает сопротивлением? Как сопротивление зависит от размеров проводника и от материала, из которого он изготовлен?

Наверное, вы сможете ответить на эти вопросы сразу. А теперь предлагаем вам еще один вопрос: что будет происходить с сопротивлением при изменении внешних условий — температуры и давления? Не торопитесь с ответом. Советуем вам прежде сделать несколько опытов.

1. Возьмите перегоревшую электрическую лампу (мощностью 100 Вт, на напряжение 220 В), батарейку (типа 3336Л, на 4,5 В), лампочку для карманного фонаря (на напряжение 3,5 В и ток 0,26 А), соединительные провода и спички. Ваша задача — исследовать зависимость сопротивления металлического проводника (спирали перегоревшей электролампы) от температуры.

Отрежьте кусок спирали длиной около 1 см; в концы этого куска вставьте медные проволочки так, чтобы между ними и спиралью был хороший контакт. Соберите цепь, состоящую из последовательно соединенных спирали, батарейки и лампочки.

Теперь зажгите спичку и раскалите спираль докрасна — лампочка почти совсем погаснет (рис. 1).

Значит, при повышении температуры сопротивление металлического проводника увеличивается.

2. Замените металлический проводник электролитом (раствором соли в воде) и проверьте, как его сопротивление зависит от температуры.

Вырежьте из жести две небольшие полоски и одну из них изогните так, чтобы между полосками был воздуш-



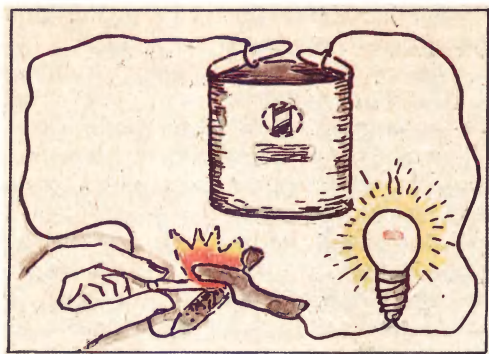


Рис. 2

ный промежуток в 1—3 мм. В этот промежуток введите несколько капель раствора соли. Концентрацию раствора подберите такой, чтобы при замыкании цепи лампочка, включенная последовательно с батареей и электролитом, горела едва заметно.

Нагрейте электролит (с помощью горячей спички), и вы увидите, что лампочка станет гореть ярче (рис. 2).

Следовательно, при нагревании сопротивление электролита уменьшается.

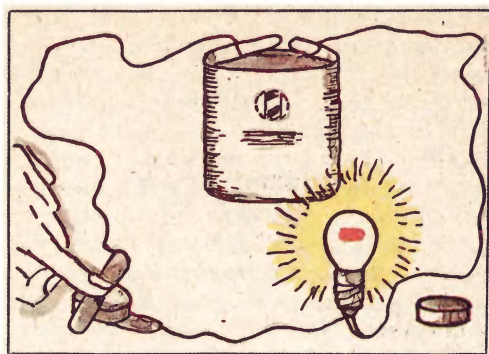


Рис. 3

3. Воспользуемся схемой предыдущего опыта, только между полосками из жести положите таблетку карбона (активированного угля, он продается во всех аптеках) — лампочка не горит.

Нажмите пальцем на верхнюю полоску так, чтобы таблетка угля оказалась сжатой, — лампочка загорится (рис. 3).

Таким образом, при увеличении давления сопротивление угля уменьшается.



ЭЛЕКТРОННЫЙ ГЛАЗ

В. С. Данюшенков

Наверное, многие из вас в кабинете физики обратили внимание на прибор, похожий на телевизор с маленьким круглым экраном. Когда он работает, по его экрану «бегают» различные светящиеся линии. Этот прибор называют осциллографом. Он служит для изображения на экране быстро протекающих и невидимых для человеческого глаза физических процессов. Тем самым прибор расширяет возможности нашего восприятия при познании явлений природы. За эту особенность осциллограф часто называют «электронным глазом».

Главное — это трубка

Основной элемент осциллографа — электронно-лучевая (или просто электронная) трубка. Она представляет собой стеклянный баллон специальной формы, из которого выкачан почти весь воздух. Внутри баллона располагаются электронная пушка для получения электронного луча и механизм для управления этим лучом (рис. 1). О том, как работает трубка, мы расскажем позже. А сначала — немного истории.

Прототипом современной электронной трубки была газоразрядная трубка, с помощью которой англичанин У. Крукс изучал процессы прохождения электрического тока через разреженные газы. Трубка представляла собой стеклянный баллон с впаянными в него электродами; баллон присоединялся к насосу, откачивающему из него воздух. Крукс обнаружил, что, когда электроды были подсоединены к источнику вы-

сокого напряжения, внутри трубки появлялись неизвестные лучи.

Спустя 25 лет французский физик Ж. Перрен доказал, что эти лучи представляют собой поток отрицательно заряженных частиц, источником которых является поверхность отрицательного электрода — катода. Перрен поместил перед катодом полый металлический цилиндр, который соединялся с электроскопом (рис. 2). Когда на электроды было подано напряжение, лепестки электроскопа зарядились и разошлись. При поднесении к электроскопу положительно заряженной стеклянной палочки лепестки возвращались в исходное положение. Следовательно, на цилиндре при работе трубки скапливался отрицательный заряд. Перрен подносил к трубке магнит так, что он находился против свободного пространства между катодом и полым цилиндром. При этом электроскоп не заряжался. Значит, отрицательно заряженные частицы, которые в отсутствие магнита попадали на цилиндр, вылетали с катода. Магнитное поле отклоняло эти частицы на стенку трубки. В этом опыте впервые было осуществлено магнитное управление потоком заряженных частиц.

Вы можете увидеть действие магнитного поля на поток электронов, поднеся магнит к телевизору сбоку. Изображение на экране будет смещаться вверх или вниз в зависимости от того, каким полюсом вы подносите магнит.

В 1897 г. немецкий физик К. Браун создал лучевую трубку с магнитным управлением, по форме похожую на современную электронную трубку.

В том же году английский физик Дж. Дж. Томсон с помощью этой трубки показал, что отрицательно заряженные частицы, вылетающие с катода, представляют собой электроны. В своем эксперименте Томсон впервые применил электрический способ управления потоком электронов. Поместив перед катодом две параллельные пластины, подсоединенные к полюсам электрической батареи, он увидел, что лучи, падающие в электрическое поле между пластинами, отклоняются от своего первоначального пути.

Увидеть, как действует электрическое поле на заряженные частицы,

вы можете, проделав такой опыт. Берете две алюминиевые пластины или крышки от кастрюль с изолированными ручками и укрепляете их параллельно друг другу. Из фольги делаете круглый шарик (или гильзу) и прикрепляете к нему нитку. Затем берете эбонитовую палочку и натираете ее кусочком шелка; при этом палочка электризуется отрицательно. Сначала легким прикосновением палочки заряжаете шарик, а потом одну из пластин. Затем натираете палочку листом бумаги. В этом случае она электризуется положительно. Заряжаете палочкой вторую пластину. Теперь все готово к опыту. Шарик на нитке опустите между пластинами. Вы увидите, что шарик отклоняется в сторону положительно заряженной пластины.

Аналогичным образом действует электрическое поле на электроны в электронно-лучевой трубке. При движении между управляющими пластинами весь поток электронов отклоняется от первоначального пути в сторону пластины, подсоединенной к положительному полюсу батареи.

Пушка, стреляющая электронами

Мы уже сказали, что источником электронов в трубке является отрицательно заряженный электрод — катод. В любом проводнике имеется огромное количество электронов, которые находятся в постоянном дви-

жении. При этом всегда есть электроны, скорость которых значительно больше средней скорости. Такие наиболее энергичные электроны, оказавшись вблизи поверхности проводника, могут «прорваться» сквозь поверхность, «испариться» (эта ситуация аналогична процессу испарения жидкости). При комнатных температурах доля этих электронов ничтожно мала. Но с повышением температуры количество «энергичных» электронов возрастает. Вылет электронов с поверхности накаливаемого проводника идет очень интенсивно.

Катод электронной трубки (тоненький проводник) разогревают до красна, пропуская через него электрический ток, и с поверхности катода вылетают электроны.

Убедиться в том, что поверхность нагретого проводника является источником электронов, можно с помощью несложного опыта. Для опыта нужна лампа накаливания, листок фольги и электроскоп. Электроскоп вы можете сделать сами. Для этого возьмите бутылку и подберите к ней пробку (лучше всего резиновую; можно сделать пробку из ластика). Через пробку пропустите достаточно длинный гвоздь; к острому концу гвоздя прикрепите лепестки из папиросной бумаги. Закройте бутылку пробкой так, чтобы лепестки были внутри бутылки. Электроскоп готов.

Из фольги вырежьте полоску и плотно оберните ее вокруг колбы



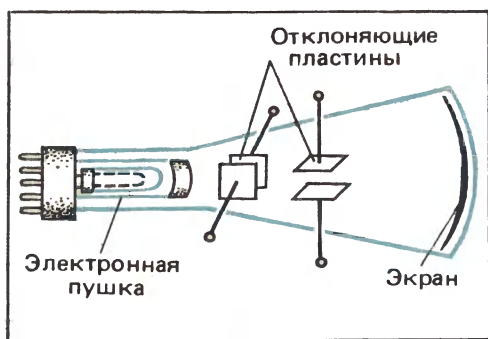


Рис. 1

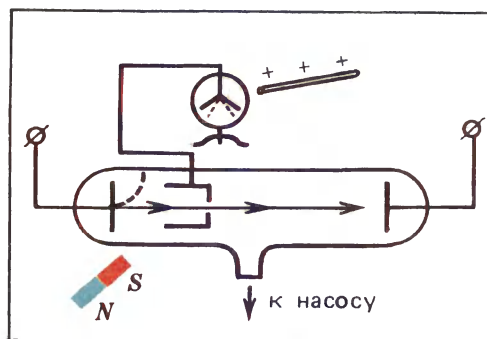


Рис. 2

лампы накаливания. Тонким проводником соедините фольгу с электроскопом.

Теперь зарядите электроскоп положительно (например, с помощью стеклянной палочки, потертой о шелк) и включите лампу в сеть. Вы увидите, что лепестки электроскопа опадают.

Фольга, соединенная с электроскопом, имеет положительный заряд. Электроны, вылетающие из нити накала лампы, притягиваются этим зарядом, оседают на колбе лампы и заряжают ее внутреннюю поверхность отрицательно. Этот отрицательный заряд и нейтрализует положительный заряд фольги и, следовательно, электроскопа.

Как собрать все «испаряющиеся» с катода электроны в тонкий луч?

Напротив катода помещен второй электрод — анод. Как правило, он имеет форму диска. Между катодом и анодом создают большое напряжение (от нескольких сотен до нескольких тысяч вольт). Электрическое поле между электродами направляет электроны, вылетевшие с поверхности катода, на анод и разгоняет их до очень большой скорости. А чтобы собрать эти электроны в тонкий луч, делают следующее.

На катод одевают металлическую «рубашку» — цилиндрический стакан с маленьким отверстием в дне. Ей сообщают отрицательный заряд. Этот заряд прижимает вылетающие с поверхности металла электроны к оси «рубашки» — стакана — так, что большая часть электронов вылетает из «рубашки» через маленькое отверстие. Меняя заряд на «рубашке», можно регулировать число вылетающих из нее электронов. Благодаря этому свойству металлическую «ру-

башку» назвали управляющим электродом. Узкий пучок электронов, вылетевших из управляющего электрода, направляется на анод и проходит через узкое отверстие в нем.

Все вместе — катод, управляющий электрод и анод — называют электронной пушкой.

Узкий пучок электронов, выстреленных электронной пушкой, попадает на экран, покрытый специальным веществом — люминофором. Под действием бомбардирующих его электронов люминофор начинает светиться, так что в том месте, где на экран падает электронный луч, появляется светящееся пятно.

Но на экране работающего осциллографа обычно видны светящиеся линии, которые, к тому же, могут «бегать» по экрану. Как же получается изображение на экране осциллографа?

Стрельба с наводкой

Воспользуемся способом Дж. Дж. Томсона для прицельной стрельбы по экрану из «электронной пушки». Для этого на пути полета электронов поставим две взаимно перпендикулярные пары пластин, подсоединенных к источникам напряжения. Пластины, лежащие в горизонтальных плоскостях, отклоняют луч вверх или вниз. Их называют вертикально отклоняющими пластинами. Пластины, лежащие в вертикальных плоскостях, отклоняют луч влево или вправо по горизонтали. Это — горизонтально отклоняющие пластины. Понятно, что, меняя напряжение на пластинах, мы будем «перемещать» на экране светящееся пятно

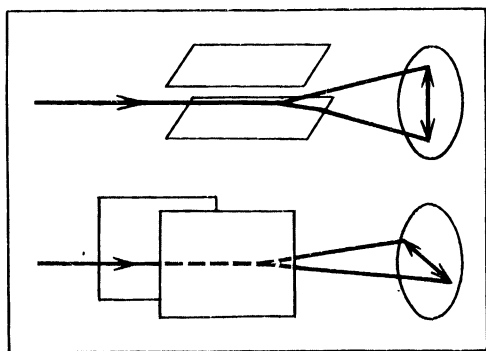


Рис. 3

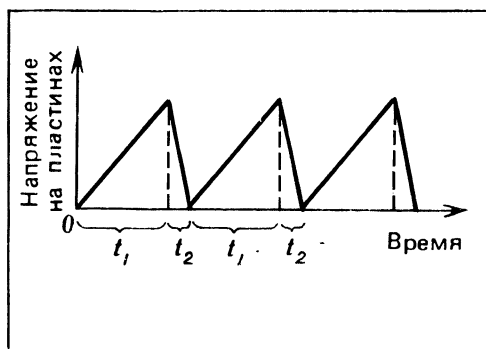


Рис. 4

(рис. 3 схематично поясняет, как это происходит). Значит, по смещению пятна в ту или иную сторону можно судить о величине напряжения, приложенного к соответствующим отклоняющим пластинам. Пластины как бы выполняют роль наводчиков при электронной пушке.

Электронный луч очень быстро реагирует на изменение напряжения на пластинах. Поэтому электронная трубка позволяет следить за процессами, в которых происходит быстрое изменение напряжений, токов. Трубка, соединенная со специальными приборами для изучения таких процессов, и образует осциллограф.

Обычно изучаемый сигнал (как правило, электрический) подают на вертикально отклоняющие пластины. А на горизонтально отклоняющих пластинах напряжение периодически меняют. График изменения это-

го напряжения во времени приведен на рис. 4. В течение времени t_1 , когда напряжение возрастает, луч, колеблющийся в вертикальном направлении (в «такт» с изучаемым сигналом), «растягивается» по горизонтали, и линия, получающаяся на экране осциллографа, показывает, как меняется со временем напряжение на вертикально отклоняющих пластинах. Затем напряжение быстро, за малое время t_2 , падает до нуля — луч на экране возвращается на «начальную» вертикаль.

* * *

Теперь вы представляете себе, как работает осциллограф. Этот прибор используется в самых разных областях научных исследований, находит широкое применение в современном производстве.

4.0 СЧЕТЕ И ЧИСЛАХ — ТЕ ИЛИ НЕ ТЕ...

О БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ

А. П. Савин

В одном пионерском лагере мне довелось присутствовать на вечере вопросов и ответов под названием «А кто самый...?» Много было разных вопросов: «У кого самый длинный хвост? Какая звезда самая близкая к Земле?» А одна девочка спросила:

— А какое число самое большое?

Вместо ответа я ей предложил сыграть в такую игру.

— Вот конфета,— сказал я.— Кто назовет большее число, тот получает эту конфету. Назови свое число!

— Сто тысяч миллионов,— выпалила девочка.

— Нет такого названия,— ответил я.

— Нет есть,— настаивала девочка.

— Ладно, тогда я загадал двести тысяч миллионов. Сыграем еще?

Остальные ребята зашумели, начали говорить, перебивая друг друга.

— Тихо,— сказал я,— давайте говорить по очереди, а то ничего нельзя понять.

Из десятка ребят, тут же поднявших руку, я выбрал невысокого мальчика в очках.

— Игра нечестная,— сказал он,— какое бы число ни назвала Маша, вы назовете число на единицу больше и выиграете. И вообще, нет наибольшего числа: к любому числу единичку можно прибавить.

Маша, продолжавшая стоять около стола, спросила меня:

— А как называются числа, большие миллиона?

Судя по лицам ребят, этот вопрос заинтересовал многих из них. Я стал рассказывать



— В пределах первой тысячи, как вы знаете, название имеет единица каждого разряда: единица, десять, сто, тысяча. Следующие единицы, имеющие собственное название, идут через каждые три разряда, то есть каждая очередная именованная единица содержит тысячу предыдущих именованных единиц:

1 000 000 — миллион,

1 000 000 000 — миллиард или биллион,

1 000 000 000 000 — триллион,

1 000 000 000 000 000 — квадриллион,

далее идут квинтиллион, секстиллион, септиллион, октиллион, нониллион, дециллион.

Принцип построения названий несложен. На латыни слова «би, трес, квадра, квинта» и т. д. означают два, три, четыре, пять и т. д. Мы видим, что троек нулей в записи числа на одну больше, чем латинское число в его названии.

Нужно сказать, что эти названия почти не используются. Астрономы, физики и другие специалисты, имеющие дело с большими числами, предпочитают записывать числа с помощью степеней числа 10. Так, число 460 000 000 физик запишет как $46 \cdot 10^7$, а чаще — как $4,6 \cdot 10^8$. Если это число нужно прочесть, то он и прочтет его как «четыре и шесть десятых на десять в восьмой».

— А что делать, если на конце не будет нулей? — спросил меня один мальчик.

— Дело в том,— сказал я,— что при физических и других измерениях.

как правило, верными бывают только первые две-три цифры. Чтобы получить большее количество верных знаков для какого-то числа, например, массы планеты или расстояния до нее, требуется применять особые предосторожности и специальные очень точные приборы. Поэтому в больших числах, получаемых из обычного эксперимента, оставляют лишь первые две-три цифры, а остальные заменяют нулями.

— А с каким самым большим числом приходилось иметь дело на практике? — раздался вопрос с последнего ряда.

— Такое число можно даже назвать, — ответил я, — физики считают, что во всей Вселенной количество элементарных частиц, из которых состоят атомы находящегося в ней вещества, не больше, чем 10^{80} . Поэтому нет практической необходимости пользоваться числами, большими, чем 10^{100} . Для этого числа придумано специальное название — *гугол*. Кажется, невозможно представить себе такую громадину. Но все-таки попробуем.

Представьте себе табло из 400 лампочек, расположенных в виде квадрата 20×20 . Это представить легко, подобные табло встречаются в крупных аэропортах и на вокзалах, там с помощью загорающихся лампочек высвечиваются объявления о прибытии и отправлении самолетов и поездов. А теперь подумаем, сколько разных способов существует, чтобы зажечь табло 20×20 .

Начнем считать количество состояний нашего табло. Для порядка занумеруем лампочки числами от 1 до 400. Первая лампочка может быть в двух состояниях: потушенной и зажженной. Две лампочки могут быть уже в четырех состояниях. Если использовать для обозначения потушенной лампочки значок 0, а для зажженной значок +, то эти четыре состояния можно перечислить: 00, +0, 0+, ++. Для трех лампочек будет уже восемь состояний: 000, +00, 0+0, ++0, 00+, +0+, 0++ , +++ . Количество состояний удвоилось потому, что оно равно количеству состояний для первых двух лампочек при потушенной третьей лампочке, плюс то же самое количество состояний при зажженной третьей. Нетрудно заметить, что при добавлении четвертой

лампочки количество состояний вновь удвоится и станет равным $2^4=16$, при пяти лампочках количество состояний будет $2^5=32$, при десяти — уже $2^{10}=1024$, а при 400 лампочках — 2^{400} .

Покажем, что это число больше гугола. Обратим внимание, что $2^{10}=1024 > 10^3$, поэтому $2^{400}=2^{10 \cdot 40} > 10^{3 \cdot 40}=10^{120}$. Итак, с помощью нашего нехитрого табло мы смогли превзойти гугол.

Сколько же времени понадобится для того, чтобы реализовать все имеющиеся возможности? Пусть у нас есть электронное реле, которое меняет состояние табло со скоростью 100 раз в секунду. Поскольку в каждом часе 3600, в сутках 86 400, а в году 31 536 000 секунд, то за год табло успеет сделать 3 153 600 000 миганий, или $3,1536 \cdot 10^9$. Разделив 10^{120} на это число, получим около $3 \cdot 10^{110}$ лет — число, в миллиарды раз большее гугола. Вот так табло!

Может быть, мы сделали великое открытие в науке? К сожалению, нет. То, что количество состояний системы во много раз превосходит количество ее элементов, люди поняли очень давно. И очень часто трудно бывает из всего многообразия вариантов выбрать наилучший. Например, где разместить заводы по производству какого-то нового типа изделий? Какие мощности выбрать для этих заводов? Если сделать немного крупных заводов, то стоимость производства будет невелика, зато изделия придется далеко возить. Если же сделать много мелких заводов, то возить изделия придется меньше, но стоимость изготовления изделий на небольших предприятиях возрастает. Чтобы решать такие и подобные задачи, имеющие большое народнохозяйственное значение, непрерывно работают тысячи электронных вычислительных машин, перебирающих тысячи вариантов в секунду.

— А можно еще вопрос? — руку поднял первый мальчик в очках.

— Да, пожалуйста.

— Но математиком, наверное, приходится оперировать еще большими числами?

— Те, кто думает, что математики только и делают, что складывают, умножают и делят числа, очень далеки от истины. Лишь в одной ее об-

ласти — теории чисел — ученые часто имеют дело с конкретными целыми числами. И здесь действительно появляются очень большие числа. Например, долгое время шло соревнование — кто назовет большее простое число. Простое — значит, имеющее лишь два различных делителя: себя и единицу. Потом стали искать лишь такие простые числа, которые имеют вид: $2^n - 1$. Эти числа называются *простыми числами Мерсенна*, в честь французского ученого Марена Мерсенна — математика, акустика, теоретика музыки, одного из основателей Парижской академии наук. Числа Мерсенна интересны тем, что если число $2^n - 1$ — простое, то число $2^{n-1}(2^n - 1)$ равно сумме всех своих делителей, кроме самого числа. Такие числа древние греки называли *совершенными*. Укажем три первых совершенных числа:

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 = 2(2^2 - 1) = 1 + 2 + 3, \\ 28 &= 2^2 \cdot 7 = 2^2(2^3 - 1) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, \\ 496 &= 2^4 \cdot 31 = 2^4(2^5 - 1) = \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 24 + 248. \end{aligned}$$

Интересно, что число $2^n - 1$ будет простым только в том случае, если число n — простое. К концу прошлого века было известно 12 простых чисел Мерсенна: для $n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107$ и 127 . Для $n=127$ простое число Мерсенна равно — тут я достал из кармана записную книжку и на доске переписал:

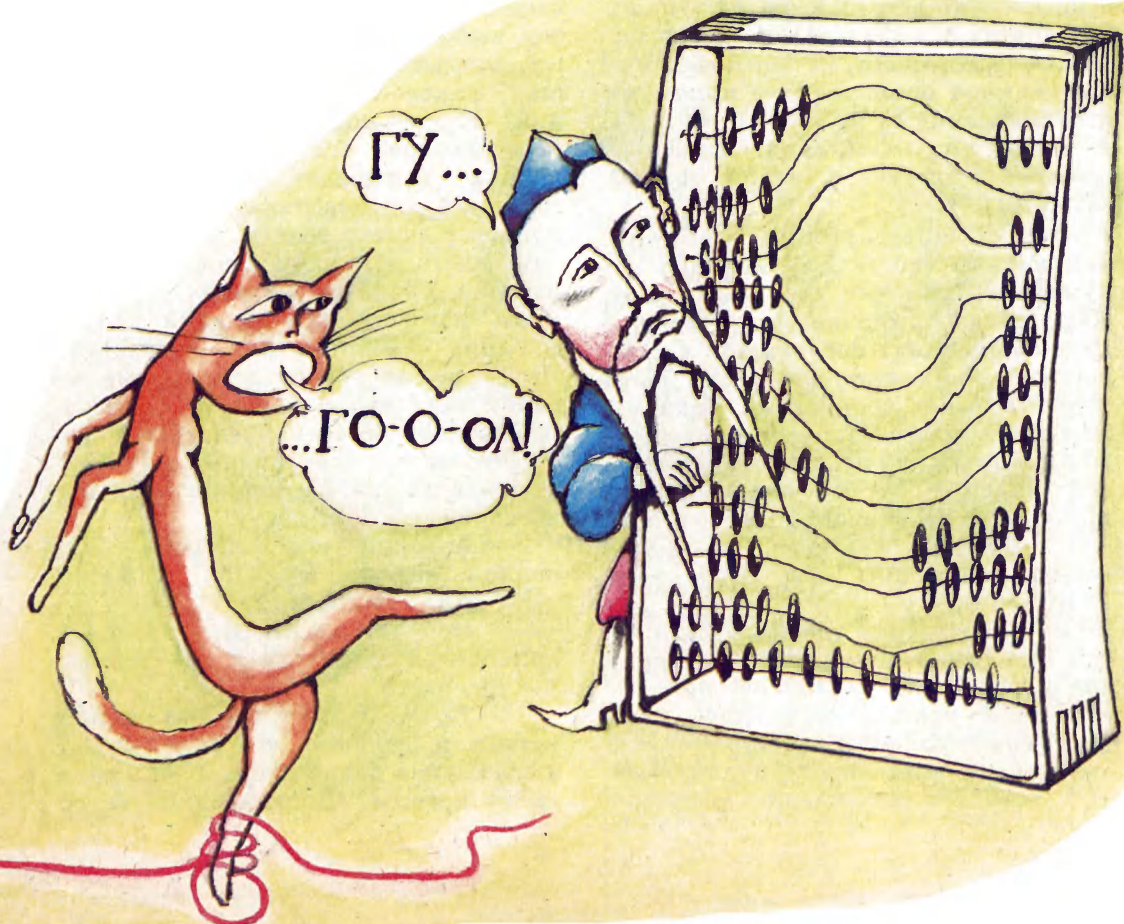
170141183460469231731687303715884105884105727.

— Это число все же меньше гугола, — продолжил я. — Но теперь за дело взялись электронные вычислительные машины. Они нашли, что числа $2^n - 1$ будут простыми при $n=521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 44497$.

Последнее число $2^{44497} - 1$ имеет уже более 13 тысяч цифр. Заметим, что гугол имеет «всего» 100 цифр.

После моего ответа последовали новые вопросы: «Какая ЭВМ считает быстрее всех? Какой зверь бежит быстрее всех?»

Вечер вопросов и ответов продолжался...



ДЛЯ ЧЕГО НУЖНЫ ПРОЦЕНТЫ?

А. П. Савин



Много ли соли в морской воде? Этот вопрос можно понимать по-разному. Например, сколько весит вся соль, растворенная в морях и океанах. А можно и так: сколько содержится соли в ведре морской воды? Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно знать ответ на второй и еще узнать, сколько ведер воды содержится в морях и океанах.

Жители приморских городов и поселков смогут ответить и на второй вопрос. Для этого достаточно набрать ведро морской воды, поставить его на огонь и греть, пока вся вода не выкипит, а затем взвесить оставшуюся на дне соль. Можно ли утверждать, что у соседа получится столько же? Видимо, нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, налитое оно может быть более или менее полно, в результате сосед будет выпаривать другое количество воды, а потому останется другое количество соли.

Таким образом, наша мера солености морской воды — количество граммов соли на ведро воды — оказалась неудачной. Возьмем другую меру — количество граммов соли на килограмм раствора. Для этого нужно до кипячения раствор взвесить, а потом массу полученной соли разделить на массу раствора. Пусть масса раствора 8,4 кг, а масса соли 21 г. Тогда получаем ответ:

$$\frac{21}{8,4} = \frac{5}{2}$$

грамма соли на килограмм раствора. Если опыт повторить, то опять получится почти такое же значение.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в пуде? Давайте будем считать число граммов в грамме. Тогда тот же ответ получится, если мы будем считать число тонн соли в тонне раствора или пудов в пуде.

Итак, поскольку в килограмме содержится 1000 граммов, то и ответ получится в 1000 раз меньший:

$$\frac{5}{2000} = \frac{1}{400}$$

Подходящая мера получена, но записать... Скажите, какое число больше:

$\frac{11}{1002}$ или $\frac{12}{1090}$? Сразу и не скажешь, нужно считать. Куда легче сравнивать десятичные дроби! Дробь 0,01097 меньше, чем 0,01101, потому что число единиц, десятых и сотых у них одинаково, а число тысячных у второй больше. Удобно? Конечно.

Ну что ж, будем записывать результат не обыкновенной, а десятичной дробью. А дальше...

Стойте, скажет нетерпеливый читатель, зачем столько премудростей ради какой-то морской воды. Взять да и попробовать на вкус — соленая или не очень. Хорошо, отвечу я, а нужно ли точно знать содержание металла в руде, жира в молоке, химических веществ в лекарстве?... Вот то-то. А ведь задача та же самая.

Итак, мы договорились записывать ответ в виде десятичной дроби. А с какой точностью? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить даже до миллиардных долей, но откуда взялись сами числа? Если весы в магазине показывают 520 г, то на самом деле предмет может весить и 515, и 524 г. А двести-триста лет назад точность весов была еще меньше. Поэтому верными можно было считать лишь первые одну-две цифры, а потому и величину содержания одного вещества в другом имело смысл рассматривать с точностью до первых двух цифр: 0,27; 0,64; 0,37; и т. д., то есть 27 сотых, 64 сотых, 37 сотых.

Вот мы и пришли к процентам, потому что в переводе с латыни «процент» — сотая часть. Была придумана и специальная запись 27%, 64%, 37%. Знак %, говорят, возник из-за ошибки наборщика, у которого



сломалась литера, в результате чего получился этот причудливый знак, признанный затем всем миром.

Запись отношений стала удобнее, исчезли ноль и запятая, и символ % сразу указывает, что перед нами относительная величина, а не граммы, литры, рубли или метры.

Проценты были известны индусам еще в V веке н. э. Это не удивительно, потому что в Индии с давних пор счет велся в десятичной системе. В Европе десятичные дроби появились на 1000 лет позже, их ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Он же в 1584 г. впервые опубликовал таблицу процентов.

Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменения производства товаров, денежный доход... Что только не измеряют в процентах, даже двоечников в школе!

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, которые составляют тысячные доли

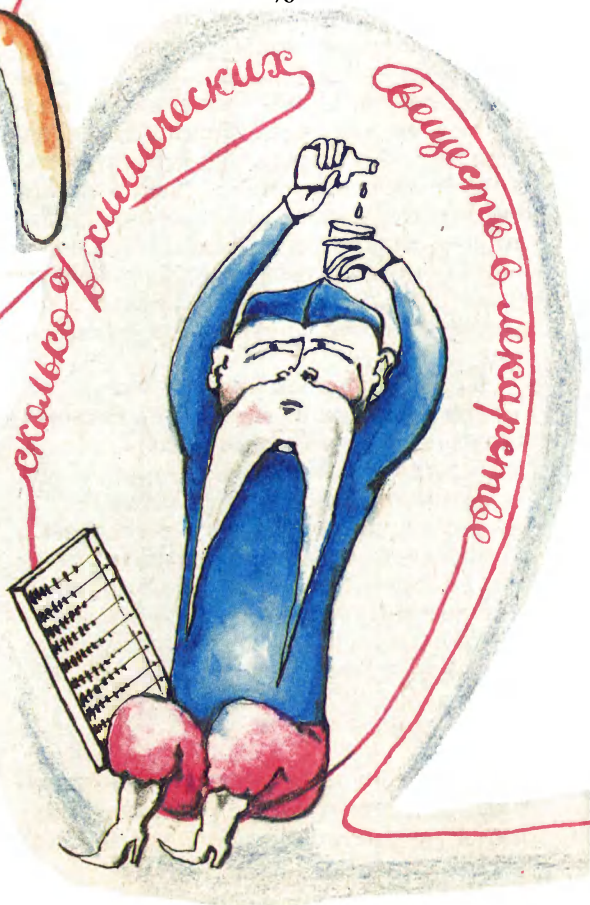
от массы самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, то есть не писать, например, $0,6\%$, ввели новую величину — «промилле» — тысячную долю, которую обозначили так: $^0/_{00}$, и вместо $0,6\%$ стали писать $6^0/_{00}$. Однако эта величина привилась только в тех областях науки и техники, где имеют дело с малыми величинами, а необходимость и появившаяся возможность считать точнее привели к тому, что счет стали вести до десятых и сотых долей процента. Нередко можно увидеть и в технической литературе, и на страницах газет записи вида $27,4\%$, $6,35\%$.

У п р а ж н е н и я

1. Арбуз весил 20 кг, а сухое вещество в нем составляло 1%. Через некоторое время арбуз усох, и сухое вещество стало составлять 2%. Сколько стал весить арбуз?

2. Множимое увеличили на 10%, а множитель уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?

3. Цену на товар уменьшили на 10%, а потом еще на 10%. Стал бы он дешевле, если его цену сразу снизили бы на 20%?



РАЗГОВОР В ТРАМВАЕ

А. П. Савин, Л. М. Финк

Я ехал по Ленинграду в трамвае со своим племянником Мишей. Опустив в кассу 6 копеек, я оторвал два билета.

— Чур, этот билет мой! — сказал Миша.

— Пожалуйста, бери любой из них. Они ведь совершенно одинаковые, с любым из них можно проехать весь маршрут.

— Одинаковые, да не совсем. Этот билет самый обыкновенный, на нем номер 286 357. А следующий билет с номером 286 358 — «счастливый», сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех.

Тут я вспомнил, что уже не раз слышал о распространенном поверье: билет с одинаковыми суммами цифр приносит счастье. В данном случае Мише достался билет 286 358, в котором $2 + 8 + 6 = 3 + 5 + 8$.

— И часто тебе попадаются счастливые билеты? — спросил я.

— Да нет, очень редко. Примерно раз в месяц. А так как я езжу в институт и обратно каждый день, кроме выходных, то, значит, в среднем один счастливый билет приходится на 50 обычных.

— Чепуха, — вмешался один из наших попутчиков. — Я вошел на предыдущей остановке и в той же кассе вытянул тоже счастливый билет — 286 349. Да и сейчас кто-то отрывает билет 286 367, тоже счастливый; скоро появится 286 376, затем 286 385. Так что в каждом десятке билетов есть один счастливый.

— Это не вполне верно, — возразил новый пассажир, оторвавший т 286 367. — Ваш

пример ничего не доказывает. В следующем десятке будет еще один счастливый билет — 286 394, а затем счастливых билетов долго не будет, вплоть до номера 286 439, так что здесь между двумя счастливыми билетами будет интервал в 45 билетов. Таких примеров можно привести много. В этой же катушке билетов, начальные цифры которых 286, между билетами 286 097, и 286 169, то есть среди 71 билета, нет ни одного счастливого.

— Вот я и говорю, — подхватил Миша, — в среднем один счастливый билет попадает на полсотни.

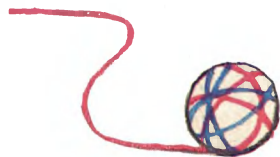
— Это тоже опрометчивое заявление, — заметил я. — Чтобы правильно ответить на этот вопрос, нужно его исследовать. А сначала нужно точно его сформулировать. Скажем, так: *сколько существует счастливых шестизначных чисел от 000 000 до 999 999, то есть чисел, у которых равны суммы первых трех и последних трех разрядов?*

— Ну что же, — сказал Миша после недолгого размышления, — я сейчас не могу точно ответить на этот вопрос, но могу описать способ, позволяющий его решить, по крайней мере, в принципе. Выпишем подряд все числа от 000 000 до 999 999 и проверим каждое из них. Таким образом мы сможем пересчитать число счастливых билетов.

— Да, такой метод решения возможен. Он называется методом перебора. Им можно решать задачи, в которых исследуются свойства конечного набора каких-либо чисел или других объектов. Однако метод перебора имеет два недостатка. Прежде всего, он очень трудоемок. Рассуди сам, необходимо проверить миллион чисел. Если на проверку каждого из них тратить всего 1 секунду, то потребуется 1 000 000 секунд, то есть почти 278 часов. При восьмичасовой ежедневной работе это займет 35 дней.

— Но ведь можно поручить это электронной вычислительной машине!

— Можно, конечно, но стоит ли палить из пушек по воробьям? Кроме того, метод перебора имеет и другой недостаток, который сохраняется и при расчете на ЭВМ. При переборе получается решение только одной конкретной задачи, которое обычно



не позволяет произвести обобщения или вскрыть какие-либо неизвестные закономерности. Поэтому-то переборные методы решения в известном смысле неинтересны.

— Разрешите мне опять вмешаться в ваш разговор, — сказал обладатель счастливого билета 286 367. — Я заинтересовался вашей задачей и уже нашел ее решение, правда, не точное, а приближенное, вернее, то, что мы, математики, называем оценкой. Да, я не представился, зовут меня Георгий Владимирович, я доцент кафедры математики одного из технических вузов. Так вот, молодой человек, — обратился он к Мише, — давайте введем новое определение счастливого билета или лучше введем новый термин, например, красивый билет. Будем называть билет красивым, если сумма первых трех цифр дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма следующих трех цифр. Понятно?

— Понятно, — ответил Миша, — но почему именно на 9?

— А потому, что в нашей десятичной системе счисления всякое число дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр. Это свойство дает возможность легко найти число красивых билетов. Действительно, среди чисел от 1 до 999 ровно 111 дают при делении на 9 остаток 1, столько же остаток 2 и так далее.

Сколько же существует различных красивых чисел с остатком 1? На первом месте может стоять 111

чисел и за каждым из них следом можно поставить любое из тех же 111 чисел. Таким образом, получаем $111 \cdot 111 = 12\,321$ красивых билетов с остатком 1. Такое же число красивых билетов дают остатки 2, 3 и так далее. А к числам с остатком 0 или, как мы привыкли говорить, делящимся без остатка, нужно еще прибавить число 000, поэтому их будет не 111, а 112, откуда следует, что красивых чисел с остатком 0 будет $112 \cdot 112 = 12\,544$. Итак, всего красивых чисел будет $8 \cdot 12\,321 + 12\,544 = 111\,112$.

— А при чем же здесь счастливые билеты? — спросил Миша.

— Это уже совсем просто! Ведь если равны суммы цифр, то равны и их остатки при делении на 9, следовательно, каждый счастливый билет является красивым. Однако не всякий красивый билет будет счастливым. Например, билет 100 748 будет красивым, но не будет счастливым. Итак, если обозначить число счастливых билетов через C , то можно написать неравенство

$$C < 111\,112.$$

— Но это все-таки не полное решение задачи, — сказал Миша.

— Мы получаем, что счастливых билетов меньше 111 112, но не знаем



на сколько. А можно ли показать, что их больше какого-то числа? Я слышал, что это называется оценкой снизу.

— Можно дать и оценку снизу,— ответил Георгий Владимирович,— боюсь только, что она будет довольно грубой. Назовем прекрасными билетами такие, у которых номер состоит из двух совершенно одинаковых половинок, например 287 287. Таких билетов ровно 1000, а именно, 000 000, далее 001 001, 002 002, ... до 999 999. Прекрасных билетов, естественно, меньше, чем счастливых, поэтому мы можем записать такую оценку:

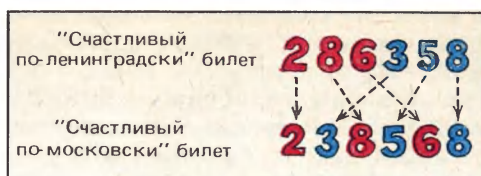
$$1000 < C < 111\,112.$$

Здесь оценка сверху более чем в 100 раз превышает оценку снизу, так что вряд ли такой результат можно считать решением поставленной задачи.

— Пожалуй, оценку сверху можно несколько улучшить,— сказал я,— используя признак делимости на 11.

— Что это за признак? — спросил Миша.— Мы его не проходили.

— Он очень прост. Сложим все цифры, стоящие в нечетных разрядах, потом отдельно сложим числа, стоящие в четных разрядах. Так вот, если разность полученных сумм делится на 11, то и все число делится на 11, и наоборот, любое число, делящееся на 11, обладает этим свойством.



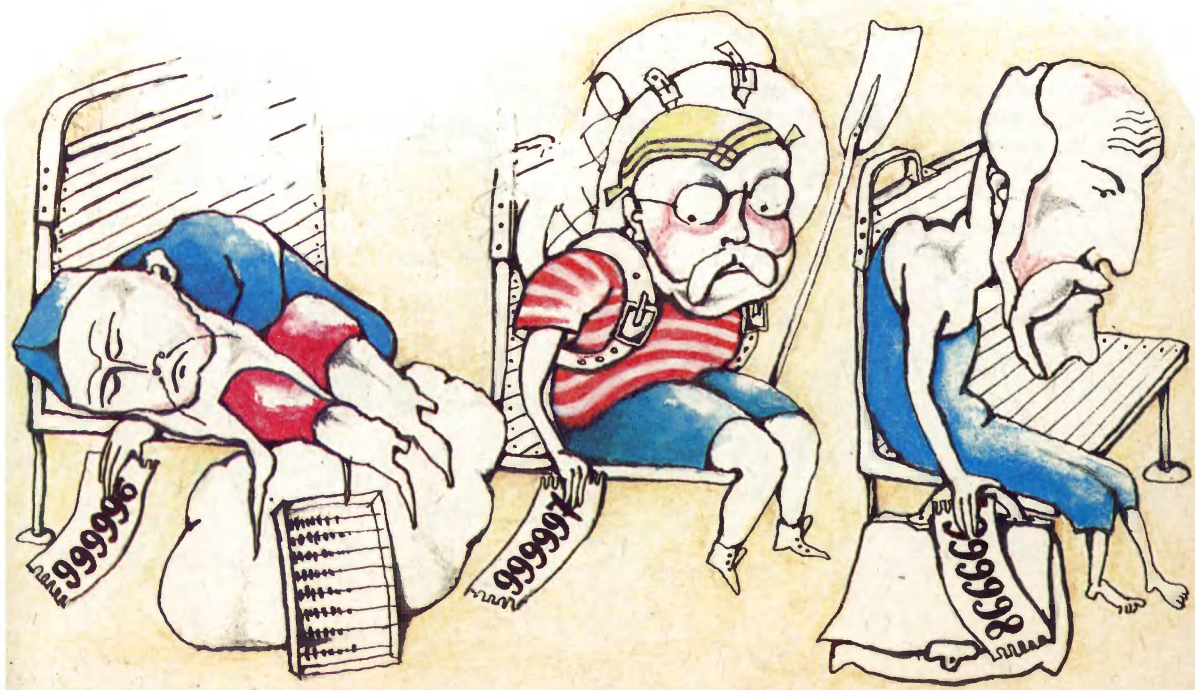
— Какое же отношение этот пример имеет к счастливым билетам? — удивленно спросил Миша.

— Самое прямое, но скажи сначала, слышал ли ты о билетах, «счастливых по-московски»?

— Ах да! Москвичи считают билет «счастливым», если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Вот чудачки!

— Во-первых, чудачком являешься ты, если веришь, что «счастливые» билеты могут приносить удачу, а во-вторых, москвичи называют «счастливыми» те же самые билеты, что и ленинградцы, а билеты, которые мы называем «счастливыми по-московски», они называют «счастливыми по-ленинградски». Так, «американские» горки в Америке называют «русскими». Но не в этом дело. Совсем легко проверить, что номера билетов, которые ты называешь «счастливыми по-московски», делятся на 11. Верно?

— Верно,— ответил Миша.



— И этих билетов не больше, чем чисел от 0 до 999 999, делящихся на 11.

— То есть не больше 90 910! — воскликнул Георгий Владимирович.

— А каких билетов больше, — спросил Миша, — просто счастливых или счастливых по-московски?

— Совсем нетрудно установить, что одних столько же, сколько и других, — ответил я.

— Скажете тоже, «нетрудно», — хмыкнул Миша, — мы же не знаем, сколько тех и других.

— А это и не нужно, — заметил Георгий Владимирович. — Расставь первые три цифры «счастливого» билета на четные места и ты получишь из счастливого билета билет, счастливый по-московски. И обратно, если у билета, счастливого по-московски, собрать все цифры, стоящие на четных местах, в первой половине номера, а остальные — во второй, то ты получишь счастливый билет. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между теми и другими билетами. А отсюда следует, что их одинаковое количество. Верно?

— Верно! — воскликнул Миша. — Вот здорово! Значит, мы доказали, что счастливых билетов меньше, чем 90 910.

— А какова будет сумма цифр у номера, если в счастливом билете заменить три последние цифры на разности между 9 и этими цифрами? — спросил Георгий Владимирович.

— Сейчас, — задумался Миша, — та-а-а-а, ... трижды девять — двадцать семь... минус... плюс... Получается 27! А ведь опять получается взаимно однозначное соответствие! Георгий Владимирович, отсюда следует, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.

— Правильно, — ответил он.

— Но сколько же все-таки счастливых билетов? — взглянув на меня, спросил Миша.

— Ответ я тебе скажу сейчас: 55 252, то есть в среднем каждый 18-й билет счастливый. А почему их столько, я расскажу тебе как-нибудь в следующий раз. Прощайся с Георгием Владимировичем и пойдем — нам пора выходить.



ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

А. Д. Вендукидзе

1

Вот я нарисовал три точки (рис. 1). Нарисовал так, что если их попарно соединить, получится правильный (то есть равносторонний) треугольник (рис. 2). Впрочем, взятые точки и без соединения создают, так сказать, «впечатление» треугольника.

А если точек четыре — можно ли их расположить аналогичным образом? Оказывается — нет; убедитесь в этом сами. И пять точек тоже не годятся. Но шесть точек расположить в требуемом порядке уже можно (рис. 3). При этом новый — «шеститочечный» — треугольник получается из «трехточечного» линейным увеличением последнего в два раза; это и вызывает добавление новых точек (рис. 4).

Сколько еще точек нужно добавить, чтобы «впечатление» треугольника сохранилось? Ответ найти нетрудно: четыре. Соответствующий треугольник — он получается линейным увеличением исходного в три раза — изображен на рис. 5.

Продолжая добавлять точки, будем получать все новые и новые треугольники. Именно, к уже имеющимся десяти точкам добавим пять, затем к пятнадцати получившимся — еще шесть точек, к ним еще семь и т. д. (сделайте рисунки самостоятельно!).

Попытаемся теперь выяснить, сколько же точек нужно иметь, чтобы из них можно было составить «треугольную конфигурацию».

В наших примерах сначала точек было 3, 6, 10; потом 15, 21, 28... Эти числа по вполне понятным причинам называются треугольными. Мы хотим выяснить, какой вид имеют треугольные числа. Сделать это нетрудно, если заметить, что

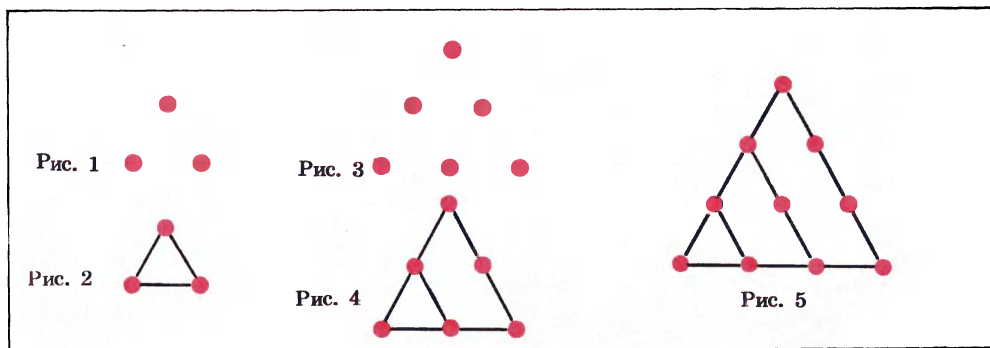
$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ &\dots \end{aligned}$$

Бросается в глаза закономерность, по которой составлены эти числа. Можно доказать, что эта закономерность имеет место и дальше. Значит, если n -е треугольное число обозначить через T_n и считать, что $T_1 = 1$, то будет справедлива следующая формула:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

На вид она довольно проста, однако для вычисления явно не пригодна. Чтобы придать ей более удобную для вычисления форму, заметим, что в правой части равенства равно удаленные от начала и конца слагаемые в сумме дают одно и то же число, а именно $n + 1$.

Теперь все очень просто: напомним нашу формулу два раза, поменяв во втором случае порядок слагаемых на



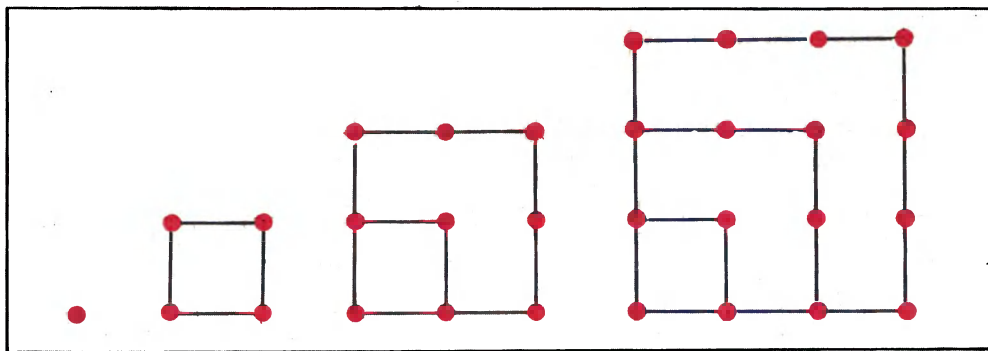


Рис. 6

обратный:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n,$$

$$T_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Сложим эти два равенства «столбиком»; тогда в левой части получим $2T_n$, а в правой — число $n+1$, взятое n раз. Итак, $2T_n = n(n+1)$, откуда $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Примененный здесь метод вычисления дал нам возможность упростить довольно громоздкое выражение. В связи с этим хочется привести традиционный рассказ о мальчике по имени Карл, блестяще применившем этот метод при решении аналогичной задачи.

«Однажды учитель начальной школы, которую посещал Карл, желая подольше занять ребят, предложил им трудную задачу; сложить числа 1, 2, 3 и т. д. до 100. Учащиеся погрузились в вычисления... Маленький Карл заметил, что пары чисел 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д. в сумме дают 101. Подсчитав в уме, что таких пар 50, он написал на своей грифельной доске ответ — 5050 и подал ее учителю. Учитель был очень удивлен...»

Будущее показало, что учителю удивляться не следовало: маленький Карл впоследствии стал великим Карлом Фридрихом Гауссом, прозванным «королем математики» еще при жизни!

2

Кроме треугольных чисел существуют также числа квадратные, пятиугольные, шестиугольные и т. д. Они связаны соответственно с квадратом,

правильным пятиугольником, правильным шестиугольником и т. д.

Обозначим n -е квадратное число через K_n , а n -е пятиугольное — через P_n ; тогда

$$K_n = n^2, \quad P_n = \frac{1}{2}n(3n-1).$$

Чтобы получить эти равенства, нужно каждое из чисел K_n и P_n представить в виде соответствующей суммы (см. рис. 6 и 7) и применить уже известный метод «спаривания» слагаемых. Соответствующие вычисления проделайте сами.

Аналогично можно найти выражения и для шестиугольных, семиугольных и т. д. чисел. Мы решим более общую задачу — найдем формулу для любого k -угольного числа.

3

Итак, пусть $F_n^{(k)}$ обозначает n -е k -угольное число. Рассмотрим k -угольник, порождающий это число (см. рис. 8). Возьмем одну из вершин этого многоугольника, например A , и проведем из нее все диагонали. Сколько их будет? Подсчитаем.

Вершину A можно соединить с каждой из остальных $(k-1)$ вершин; но при соединении A с двумя соседними с ней вершинами мы получим не диагонали, а стороны многоугольника. Значит, диагонали получаются при соединении A с $(k-1)-2 = k-3$ вершинами. Это и есть число диагоналей.

Проведя диагонали из вершины A , мы разобьем k -угольник на $k-2$ треугольника (см. рис. 9). Каждый из этих треугольников связан с n -м треугольным числом T_n . Зная же T_n , мы можем подсчитать число точек и в данном k -угольнике, то есть найти формулу для $F_n^{(k)}$. В самом деле, в каж-

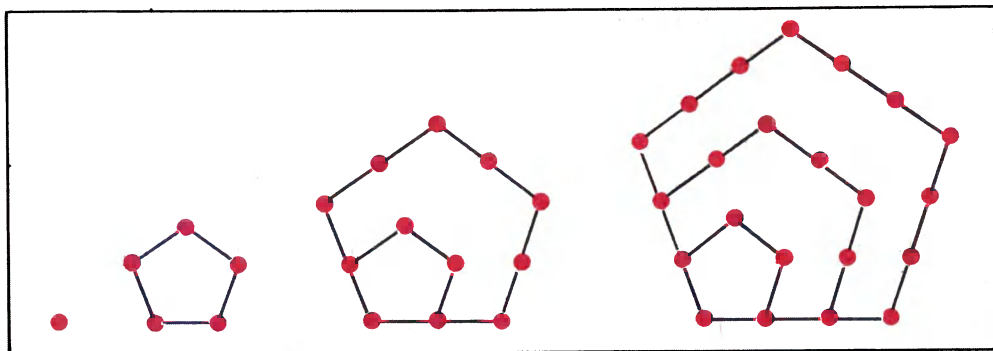


Рис. 7

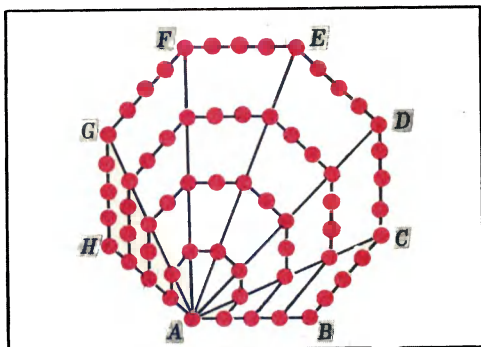


Рис. 8

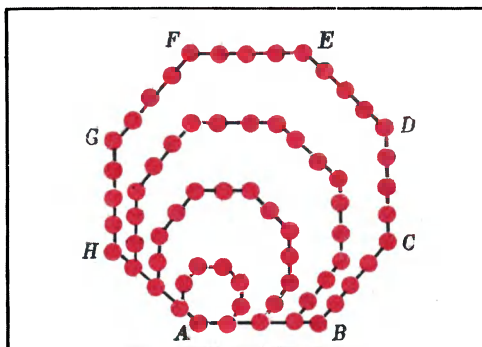


Рис. 9

дом треугольнике T_n точек, а треугольников $k - 2$. Итого $(k - 2)T_n$ точек. При этом точки, лежащие на диагоналях, мы считали два раза — ведь диагональ является общей стороной двух смежных треугольников, а точку A , которая является общей для всех треугольников, $k - 2$ раза.

Уточним наш подсчет: на каждой диагонали n точек, а если отбросить точку A , то $n - 1$, значит, $(n - 1)(k - 3)$ точек мы считали по два раза, а точку A мы считали $k - 2$ раза и получили при этом на $k - 3$ точки больше, чем следовало. Следовательно, из выражения $(k + 2)T_n$ нужно вычесть число $(n - 1)(k - 3)$ и число $k - 3$. Это дает для $F_n^{(k)}$ следующее выражение:

$$F_n^{(k)} = (k - 2)T_n - (n - 1)(k - 3) - (k - 3).$$

Подставив сюда значение T_n , получим после элементарных преобразований искомую формулу:

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2}n[(k - 2)n + 4 - k].$$

Полагая, в частности, в этой форму-

ле $k = 3, 4, 5$, получим соответственно формулы для T_n, K_n, P_n .

4

Многоугольные, или, как часто их называют, фигурные числа были известны еще в глубокой древности. Предполагают, что впервые они появились в VI веке до н. э. — в школе Пифагора. В дальнейшем многие математики интересовались этими числами. Про них доказано много важных и трудных теорем. Приведем одну из них: *Всякое натуральное число есть либо сумма не более трех треугольных чисел; либо сумма не более четырех квадратных чисел, либо сумма не более пяти пятиугольных чисел и т. д.*

Эту теорему сформулировал без доказательства один из крупнейших математиков XVII века Пьер Ферма. Она привлекла внимание многих выдающихся математиков — Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Гаусса. Каждый из них внес свой вклад в ее доказательство, но полностью теорема была доказана лишь в XIX веке французским математиком Коши.

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ

А. Д. Бендукидзе,
А. П. Савин

— Здравствуй, Ира!

— А, это ты, Витя! Заходи, садись.

— Как твоя ангина?

— Врач говорит, что в понедельник уже можно идти в школу. А что новенького в классе?

— Сегодня смеху было! Наталья Николаевна вызвала к доске Сережу Казакова. Уж не помню, какую он решал задачу, но по ходу дела ему нужно было сложить $2/3$ и $5/4$. Он взял и сложил числитель с числителем, а знаменатель — со знаменателем, — получил в результате $7/7$, то есть единицу. А Наталья Николаевна и говорит: «Дай, Сережа, дневник, я эту единицу поставлю туда тебе на память».

— Постой-ка, Витя, а это же любопытно!

— Это точно! Единиц у нас давно уже никто не получал.

— Да я не про то. Смотри, одна дробь была меньше единицы, а вторая больше, а в результате получилась единица. Давай возьмем, например, $2/3$ и $2/5$. Так... Складываем числители, потом знаменатели...

— Тебе лавры Казакова не дают покоя?

— Обожди, мы получаем $4/8$, то есть $2/4$, то есть $1/2$. Ага! $1/2$ больше, чем $2/5$, но меньше чем $2/3$. Ура! Витя, я придумала новую теорему: *если у двух дробей сложить числители, а потом знаменатели, то получится дробь, которая больше меньшей дроби, но меньше большей.*

— Постой, а откуда ты знаешь, что это верно?

— А я еще не знаю, я чувствую, что это так.

— Давай проверим. Если две дроби равны, то такое «сложение» по твоей теореме должно давать равную им дробь. Возьмем $2/3$ и $4/6$. Так... Получаем $6/9$, то есть снова $2/3$.

— А зачем брать частный случай? Возьмем несократимую дробь a/b .

— Почему несократимую?

— Хорошо, я умножу числитель и знаменатель на какое-нибудь число n . Теперь возьму другую, равную ей дробь. Для этого я умножу числитель и знаменатель на число m . Получим:

$$\frac{na}{nb} \text{ и } \frac{ma}{mb}$$

Сложим числители и знаменатели, разделим. Получилось

$$\frac{na + ma}{nb + mb}$$

Теперь я вижу, что нужно сделать! В числителе вынесем множитель a , а в знаменателе b . Запишем это:

$$\frac{a(n + m)}{b(n + m)}$$

Теперь можно сократить на $(n + m)$; видно, что получилась дробь, равная первоначальной.

— Витя, а ведь это тоже прекрасная теорема! Послушай формулировку:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

— А я думаю, что еще лучше ее сформулировать так:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{na + mc}{nb + md}.$$

В понедельник Ира и Витя показали Наталье Николаевне свое открытие.

— Что ж, молодцы, — сказала Наталья Николаевна, — но свойство, которое вы открыли, конечно же, известно. Оно называется *производной пропорцией*. В дальнейшем оно может вам не раз пригодиться. И конечно же, следует написать о нем в нашу математическую стенгазету. Там же мы поместим и твою, Ира, теорему:

$$\text{если } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Ты верно угадала. Только докажи ее сама.

А от себя я добавлю еще несколько теорем на производные пропорции.

Запиши, Витя. Первой теоремой пусть будет такая:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

— Ну, Наталья Николаевна, это же совсем просто! Разделим почленно левую часть на b , а правую — на d , получим

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Но ведь дроби же равны, значит, прибавив по единице к обеим частям верного равенства, мы снова получим верное равенство.

— Вторая будет посложнее:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

Запиши и третью:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

— А вот тебе пропорция даже не с двумя, а с четырьмя произвольными

числами:

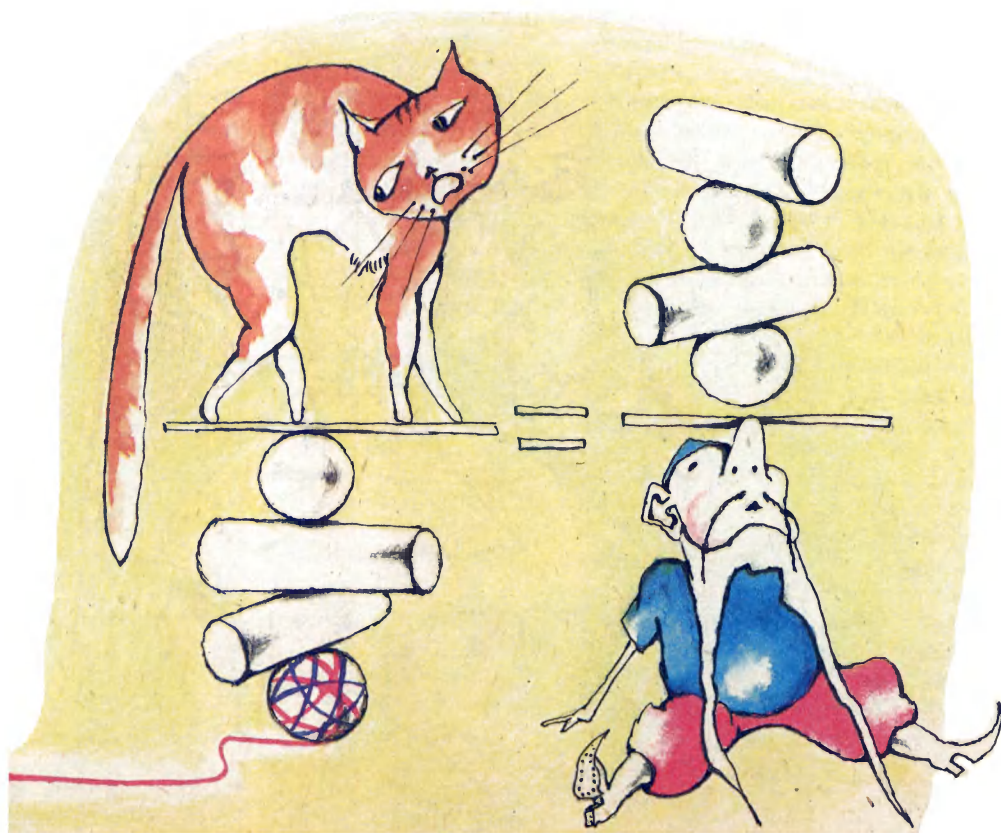
$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ и } n, m, p \text{ и } r \text{ — произвольные числа, то}$$

$$\frac{na + mb}{pa + rb} = \frac{nc + md}{rc + rd}.$$

— Наталья Николаевна, — сказала Ира, — а ведь предыдущие ваши теоремы являются частными случаями этой. В первой теореме m , n и r равны единице, а p — нулю, во второй m равняется нулю, а остальные числа — единице. А в третьей n , m и p равны единице, а r — минус единице. Стало быть, доказав эту теорему, я докажу и все остальные.

— Нет, — протянул Витя, — лучше я попробую рассмотреть частные случаи, а потом, глядишь, и станет ясно, как доказывать теорему в общем виде, чем сразу ломать голову над трудной теоремой, — тем более, одну я уже доказал.

И вас, читатели, приглашаем подумать над теоремами, о которых шла здесь речь.



НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА

А. Н. Старичков

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.



КАЛЕНДАРНЫЕ КУРЬЕЗЫ

Я. А. Смородинский

В о п р о с ы.

1. Вопрос возник неожиданно. Надо было отметить в календаре памятную дату — 200 лет со дня смерти Леонарда Эйлера. Эйлер умер в Санкт-Петербурге (так назывался тогда Ленинград) 7 сентября 1783 г. 200-я годовщина этого события приходится на 7 сентября 1983 г. Однако это не совсем так. В XVIII веке в России действовал юлианский календарь (так называемый старый стиль), по которому еще и сейчас отмечает свои праздники православная церковь. После Октябрьской революции юлианский календарь сменился григорианским календарем, принятым в большинстве стран мира (новый стиль).

Как известно, юлианский календарь отстает от григорианского: в XVIII веке это отставание составляло 11 дней. Поэтому день смерти Эйлера по новому стилю был 18 сентября 1783 г. (так он и отмечается в книгах), а годовщина должна быть отмечена 18 сентября 1983 г. (по новому стилю).

Но если бы мы пользовались календарем церкви (старый стиль), то годовщина в нем отмечалась бы 7 сентября. В XX веке для перехода к новому стилю надо прибавлять 13 дней (годы 1800 и 1900 были високосными по юлианскому календарю и обычными по григорианскому). Поэтому по новому стилю годовщина приходится на $7 + 13 = 20$ сентября 1983 г. Когда же надо на самом деле отмечать годовщину смерти Эйлера — 18 или 20?

2. Казалось бы перевод дат старого стиля к новому дело простое: в XVIII веке надо было прибавлять 11 дней, в XIX веке 12 и в XX веке

13 дней. Но как быть когда мы попадаем на рубеж столетий? Пусть, например надо узнать какое число по новому стилю отвечает 25 декабря 1900 г. (по старому стилю). Будет ли это 6 января 1901 г. (прибавили 12 дней, как в XIX веке). День 25 декабря 1900 г. находится в XIX веке по старому стилю, но в XX веке по новому стилю.

3. Дни недели находятся, как считали древние, под покровительством небесных светил. Понедельник это день Луны, вторник день Марса, среда — Меркурия, четверг — Юпитера, пятница — Венеры, суббота — Сатурна и, наконец, воскресенье — Солнца. Эта связь отражена в латинских названиях дней недели: Dies Lunae, Dies Martis, Dies Mercurii, Dies Jovis, Dies Veneris, Dies Saturni, Dies Solis. Частично такая связь сохранилась в европейских языках и даже на языке хинди.

Можно ли увидеть какой-то порядок, какую-то симметрию в этом порядке названий?

4. В Тихом океане проходит невидимая линия дат. Корабли, пересекающие эту линию с запада на восток, откидывают один день: часы на Аляске отстают от часов на Чукотке на 24 часа.

Предположим, что мы совершаем кругосветное путешествие с запада на восток за очень короткий срок — за несколько часов — двигаясь, например, по параллели неподалеку от Северного полюса, или путешествуя на сверхзвуковом самолете где-то в более цивилизованных местах.

Во время путешествия мы пересекаем линию дат и теряем день. Повторив путешествие несколько раз, мы как бы попадаем в прошлое. Конечно, это не так. Надо откидывать день только потому, что пересекая часовые пояса (все 24) надо было переводить часы каждый раз на 1 час вперед. Перевод календаря на сутки на линии дат компенсирует эти переводы стрелок. Летя на самолете не надо было трогать часы вообще и не обращать тогда никакого внимания и на линию дат. В самолете надо жить по собственному времени, или, точнее, по времени аэропорта, с которого начался (и где закончился) полет.

Вспомним теперь другую историю. Когда заканчивалось кругосветное

путешествие, начатое Магелланом, единственный корабль «Виктория», завершивший длинный путь, зашел за продовольствием на остров Сантьяго у западного побережья Африки. Здесь обнаружилось, что у португальцев, живущих на острове, был четверг (10 июля 1522 г.), в то время, как участник экспедиции Антонио Пигафетта, который вел аккуратно ежедневные записи, считал, что этот день был средой 9 июля. Только потом он понял, что передвигаясь с запада на восток (из Испании в Атлантический океан) корабль совершил на один оборот вокруг земной оси меньше, чем Земля и поэтому потерял один день.

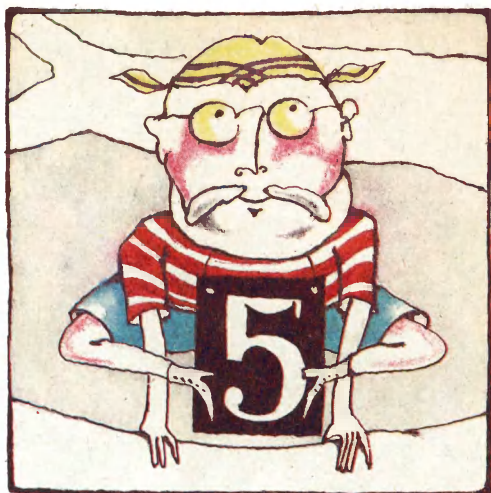
Но с другой стороны, путешественники не знали ни часовых поясов, ни линий дат — они жили по корабельному времени. Почему же часы (и календарь) у них показывали не то же самое, что и часы на берегу? Почему же в самом деле часы на корабле шли медленнее, чем часы на суше?



5. О ФИЗИКЕ МОЛЕКУЛ И ТЕПЛОТЕ

КАК ИЗМЕРИТЬ МОЛЕКУЛУ

Н. А. Родина



Наши основные знания о молекулах можно выразить очень простыми словами:

1. Все тела состоят из мельчайших частиц — атомов и молекул.

2. Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного движения. Это движение является вечным, не прекращаясь ни при каких условиях.

3. Молекулы и атомы всех тел взаимодействуют друг с другом. В разных телах они взаимодействуют по-разному, в зависимости от вида молекул и от расстояния между ними.

Эти три положения называют основными положениями молекулярно-кинетической теории.

В науке, пожалуй, мало найдется таких областей знания, которые имели бы столь длительную и столь плодотворную историю развития, как знания о молекулах. Упоминания о мельчайших частицах вещества имеются в рукописях XII века до н. э. Значит, уже в течение 32-х веков (3200 лет) создаются эти знания!

Многие великие ученые вложили свой труд в создание молекулярно-кинетической теории. В наше время строение молекул и их поведение изучены достаточно полно для того, чтобы даже перестраивать молекулы, создавать вещества с заранее заданными свойствами. Созданы искусственные рубины, каучук, пластмассы, лекарства и витамины. Вы, наверное, читали о том, с каким трудом добывали раньше эти вещества в естественном виде: рубины добывали из-под земли, каучук — из сока тропических растений, пластмасс раньше не знали совсем.

Итак, молекулы изучены хорошо, их продолжают изучать и в наше время. Более того, основные направления развития современной физики во многом связаны с применением знаний о строении вещества. Это нужно иметь в виду тем, кто собирается в будущем заниматься физикой.

Наш рассказ будет посвящен определению размеров молекул.

Можно ли вообразить себе, насколько малы эти размеры? Можно ли например, при помощи пальцев показать хотя бы расстояние между молекулами воздуха, которое обычно примерно в 10 раз больше диаметра самой молекулы?

Размеры молекул были определены во многих опытах. Опишем один из них; этот опыт провел около 70 лет назад английский ученый Роберт Релей.

В чисто вымытый большой сосуд налили воду и на поверхность ее поместили каплю оливкового масла. Капля растеклась по поверхности воды и образовала пленку. Постепенно площадь пленки увеличивалась, но затем растекание прекратилось и площадь перестала изменяться. Релей предположил, что молекулы расположились в один ряд, то есть толщина пленки стала равна как раз размеру одной молекулы, и решил определить эту толщину. При этом нужно учесть, что объем пленки равен объему той капли, которую в начале опыта поместили на поверхность воды.

По данным, которые были получены в опыте Релея, рассчитаем толщину пленки и узнаем, чему равен линейный размер молекулы масла.

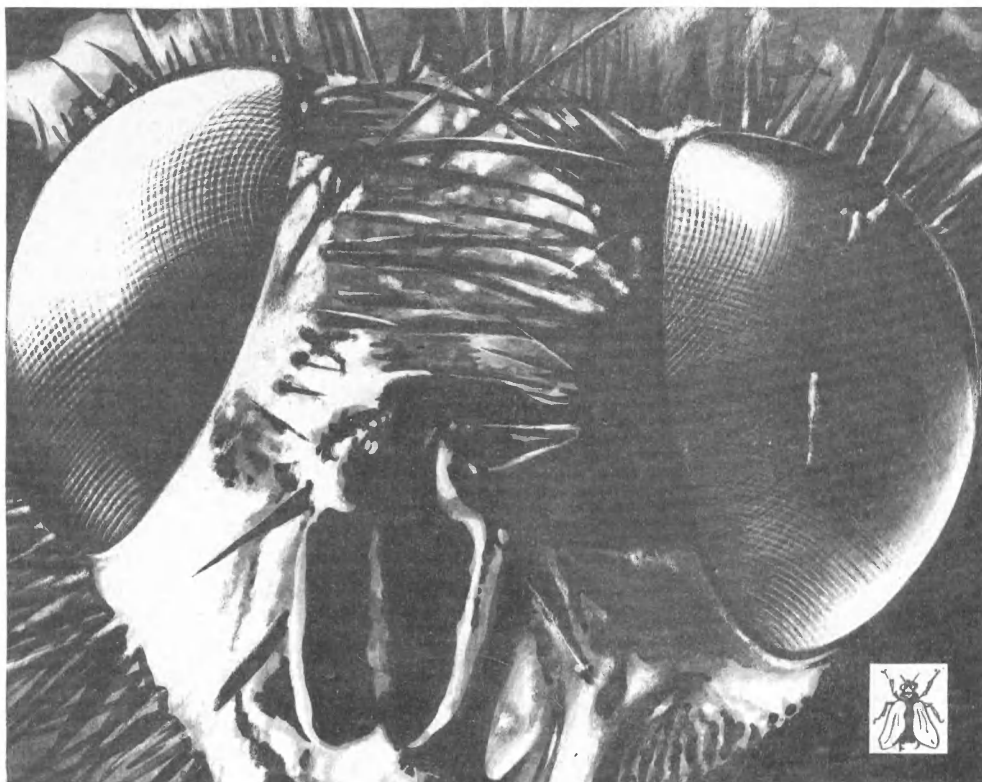


Рис. 1

Капля имела объем $0,0009 \text{ см}^3$, а площадь образовавшейся из нее пленки оказалась равной 5500 см^2 . Отсюда толщина пленки

$$d = \frac{V}{S} = \frac{0,0009 \text{ см}^3}{5500 \text{ см}^2} = 0,00000016 \text{ см}.$$

В опыте Релея объем капли был определен по ее массе и плотности — величинам, которые можно точнее измерить, чем объем капли. Масса была равна $0,0008 \text{ г}$, плотность масла $0,9 \text{ г/см}^3$. Подсчитайте по этим данным объем капли.

Многочисленные опыты показали, что молекулы разных веществ отличаются по размерам. Но когда хотят оценить диаметр молекулы (если принять, что она имеет форму шарика), то берут значение $0,00000001 \text{ см}^*$.

Можно ли представить себе частицу, имеющую такие размеры?

*) Вы уже, наверное, заметили, какими длинными числами записываются размеры молекул. Более кратко данное число можно записать так: 10^{-8} см . Как перейти от одной записи к другой, вы поймете, если сосчитаете, на каком месте после запятой стоит значащая цифра в числе $0,00000001$.

Посмотрите на фотографию головки обыкновенной комнатной мухи, сделанную при сильном увеличении (рис. 1). По бокам головки вы видите глаза мухи, они состоят из отдельных элементов, так называемых фасеток. На фотографии каждая фасетка имеет диаметр примерно 1 мм . А теперь посмотрите на рисунок, где муха изображена в натуральную величину, здесь весь глаз мухи имеет диаметр, меньший миллиметра. Теперь постарайтесь представить себе размер каждой фасетки глаза мухи. Так вот — молекула еще примерно в $100\,000$ раз меньше такой фасетки!

Конечно, такую частицу нельзя увидеть невооруженным глазом. Но может быть ее можно увидеть в микроскоп? Каким для этого должно быть увеличение микроскопа?

Капля воды диаметром в $0,5 \text{ см}$ при увеличении в 2000 раз будет иметь размеры классной комнаты, но и тогда в ней нельзя будет различить отдельные молекулы. При увеличении еще в 2000 раз капля будет иметь в поперечнике 20 км и ее «зернистое» строение начнет вырисовываться пе-

ред нашими глазами. Но нужно увеличить ее еще в 250 раз, чтобы увидеть, наконец, строение молекулы воды, но... такое увеличение (в общей сложности в миллиард раз) получить нельзя.

В наше время при помощи специальных микроскопов (электронных микроскопов) получают фотографии, на которых можно различить отдельные молекулы.

На фотографии (рис. 2) вы видите молекулы белка, диаметр которых примерно в 100 раз больше, чем у воды. Зная, что фотография сделана при увеличении в 73 000 раз, попробуйте примерно оценить диаметр молекулы белка.

И, наконец, советуем вам самим проделать опыт по определению размеров молекул масла. Конечно, повторить опыт Релея трудно, так как для этого нужно иметь специальный сорт масла и сделать точные измерения. И все же попробуйте! Наградой вам будет сознание, что вы определили величину, которая сравнима с размерами молекул.

Для опыта удобно воспользоваться чистым машинным маслом. Сначала определите объем одной капли этого масла. Придумайте сами, как это сделать при помощи пипетки (капельницы) и мензурки (можно воспользоваться мензуркой, которой отмеривают лекарства, емкость этой мензурки 30 мл, то есть 30 см³).

Налейте в тарелку воды и на ее поверхность осторожно капните (конечно, при помощи той же самой пипетки!) каплю масла. Когда капля растечется до предела, измерьте диаметр пленки линейкой, положенной на края тарелки. Если поверхность пленки не будет иметь форму круга, то или подождите, когда она примет такую форму, или сделайте несколько измерений и определите ее средний диаметр. Затем вычислите площадь

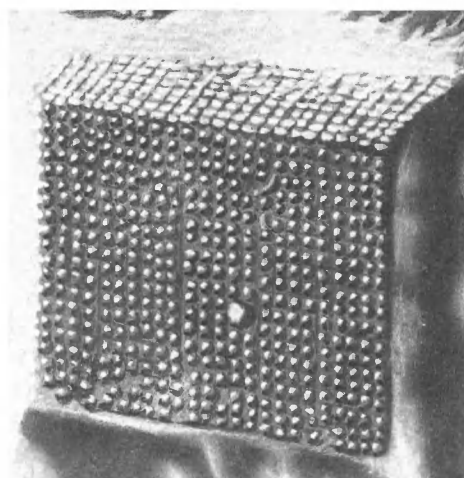


Рис. 2

пленки и ее толщину. Какое число вы получили? Во сколько раз оно больше размера молекулы масла (0,0000002 см)?

В наше время ученые стремятся определить уже не только размеры, но и форму молекулы. При помощи электронного микроскопа получены фотографии больших молекул, на которых просматриваются их контуры. Замечательно, что эти контуры хорошо согласуются с теми формами, которые теоретически предсказаны учеными для молекул.



МОЖНО ЛИ ВЗВЕСИТЬ МОЛЕКУЛУ?

Н. А. Родина

О том, что размеры молекул невообразимо малы, читатель узнал из предыдущей статьи. Даже на кончике комариного жала (площадь его около 10^{-12} см²) могут уместиться десятки тысяч молекул воды.

Соответственно малы и массы молекул. Существуют весы, при помощи которых можно обнаружить, что на лист бумаги нанесена точка типографского шрифта, а ведь диаметр точки в миллион раз больше молекулы воды. И все же массы молекул определяют с очень большой точностью и разными способами. Расскажем об одном из них.

Известно, что атмосфера Земли состоит из разных газов — азота, кислорода, водорода, углекислого газа и других. Высота атмосферы велика; установлено, что она простирается до 2000 км от поверхности Земли (точно указать границу нельзя, так как переход к безвоздушному пространству происходит постепенно). Но основная масса воздуха сосредоточена внизу. В нижнем слое атмосферы, высота которого всего 16 км, содержится 0,9 ее массы.

Молекулы воздуха, как и молекулы всех тел, непрерывно движутся. Скорости их движения довольно велики, например, молекула водорода при 0 °С движется со скоростью 1693 м/с. Благодаря этому движению молекулы разлетелись бы по всему мировому пространству. Но почему же тогда «оседают» молекулы на Землю? Причина в том, что на них действует сила тяжести, направленная вниз, к Земле. В свою очередь, непрерывное движение молекул пре-

пятствует тому, чтобы они все «упали» на Землю и покрыли ее тонким слоем.

Сила тяжести, действующая на тело, прямо пропорциональна его массе, а молекулы разных газов, входящих в состав воздуха, имеют разные массы. Значит, высота атмосферы, ее средняя плотность, *распределение молекул по высоте* зависят от масс молекул. Например, если бы атмосфера состояла только из кислорода, то на высоте 5 км ее плотность была бы в два раза меньше, чем у поверхности Земли, а если бы она состояла только из водорода, то такое уменьшение плотности произошло бы на высоте 80 км.

Конечно, распределение молекул зависит и от температуры, так как с температурой связана скорость движения молекул. Как вы думаете, как изменились бы приведенные выше числа, если бы Земля стала двигаться по орбите, более близкой к Солнцу (например, «поменялась местами» с Венерой)? А если бы Земля удалась от Солнца («поменялась местами» с Марсом)?

Но какое отношение имеет наш рассказ об атмосфере Земли к определению масс молекул? Дело в том, что у французского физика Жана Перрена возникла идея создать маленькое подобие атмосферы, в которой роль молекул играли бы частицы, хотя и чрезвычайно малые, но все же такие, чтобы их можно было увидеть в микроскоп, определить их размеры и массы, а затем, сравнив картину их распределения по высоте с распределением молекул в атмосфере, сравнить и массы молекул с массами этих частиц.

Для этого перемешали с водой другую жидкость — смолу. Смолы не растворяются в воде и образуются смесь, содержащая отдельные микроскопические капельки смолы, плавающие в воде. Такую смесь называют эмульсией (например, сливки в молоке, пока они не отстоятся, образуют эмульсию). Еще до того, как был поставлен этот опыт, ученые предполагали, что капельки смолы в воде будут вести себя так же, как молекулы газов в атмосфере, то есть распределяться по высотам в зависимости от своих масс по аналогичным для атмосферы законам. Опыты, ко-

торые Перрен начал в 1908 г., подтвердили это предположение.

Капельки смолы имели форму шариков, их диаметр был измерен и оказался (в одной из серии опытов) равным $0,00005$ см (то есть $5 \cdot 10^{-5}$ см). Как видите, диаметр их очень мал, но все же намного больше диаметра молекул, который, напомним, имеет значение порядка 10^{-8} см.

Замечательна та точность и добросовестность, с которой проводились эти опыты. Капли разного размера много раз отделяли друг от друга, чтобы получить однородные эмульсии. Проводили несколько серий измерений, используя крупные капли — диаметром в 5 десятитысячных долей миллиметра, и мелкие — диаметром в 14 сотысячных его долей.

Размеры капель определяли разными способами. Один из них — его называют способом рядов — можно понять из приведенной фотографии (рис. 1). На ней видны осевшие на поверхность сосуда капли эмульсии. В некоторых местах капли расположились по прямой линии, образовали ряд (например, под точкой *a*). Измерив длину ряда, сосчитав число капель в нем и зная, с каким увеличением сделана фотография, определяли средний диаметр капли. Известно, что такие, средние измерения дают более точные результаты, чем измерения отдельной частицы.

Отыщите на фотографии ряды частиц и определите диаметр частицы данной эмульсии (увеличение фотографии равно 5000).

Вернемся к опыту Перрена. Когда в сосуде образовалась эмульсия, капельки смолы стали оседать на дно и оседали долго — несколько месяцев; затем наступило равновесие. Все ли капельки расположились около самого дна? Нет, получилась картина, напоминающая атмосферу Земли: у самого дна число капелек было наибольшим, а затем оно постепенно убывало с высотой. Причина такого распределения капелек в слоях эмульсии та же, что и для молекул воздуха в атмосфере! Разница лишь в том, что капельки смолы двигаются не сами, а их со всех сторон толкают молекулы окружающей их воды.

Весь слой эмульсии, вся эта маленькая «атмосфера» имела толщину всего $0,01$ см.

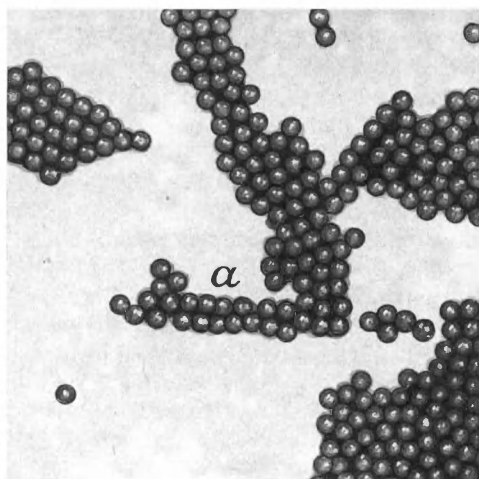


Рис. 1

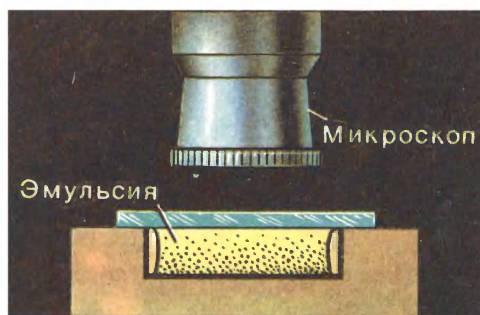


Рис. 2

Чтобы подсчитать число капелек в разных слоях, поступили следующим образом. Эмульсию поместили под микроскоп (рис. 2). Сначала микроскоп сфокусировали так, чтобы резко был виден самый нижний слой (толщиной примерно $0,0001$ см) и пересчитали капельки смолы в нем. Затем микроскоп сфокусировали на следующий слой и т. д. Считать капли было нелегко, они все время перемещались, число их было огромно. В одном из опытов сам Перрен пересчитал 13 000 капелек на четырех уровнях.

Сопоставление числа частиц в разных слоях эмульсии позволило получить первый важный результат — было твердо установлено, что частицы эмульсии распределяются под действием силы тяжести точно по такому же закону, как и молекулы воздуха в атмосфере Земли. Опыты проделывали много раз, в разных вариантах; брали другую смолу, добавляли в воду глицерин, но результат оставался прежним. Следовательно, с полным правом можно было сравнить распре-



деление капель смолы в эмульсии с распределением молекул в атмосфере. Теперь можно было определить массы молекул газов, содержащихся в атмосферном воздухе.

Воспользуемся результатами одного из опытов. Масса одной капельки смолы оказалась равной $7,8 \cdot 10^{-15}$ г. Высота h , на которой число таких капель было в два раза меньше, чем у дна, равна $3 \cdot 10^{-3}$ см. Вспомним данные о нашей атмосфере: если бы она состояла только из кислорода, то на высоте $H = 5$ км плотность кислорода была бы в два раза меньше, чем у поверхности Земли. Надо подсчитать массу молекулы кислорода. Обозначим эту массу через m , а массу капельки эмульсии через M и запишем такое отношение:

$$\frac{m}{M} = \frac{h}{H}.$$

откуда

$$m = \frac{M \cdot h}{H} = \frac{7,8 \cdot 10^{-15} \text{ г} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}}{5 \cdot 10^5 \text{ см}} = 47 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 4,7 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Сделайте самостоятельно аналогичный подсчет для молекул водорода.

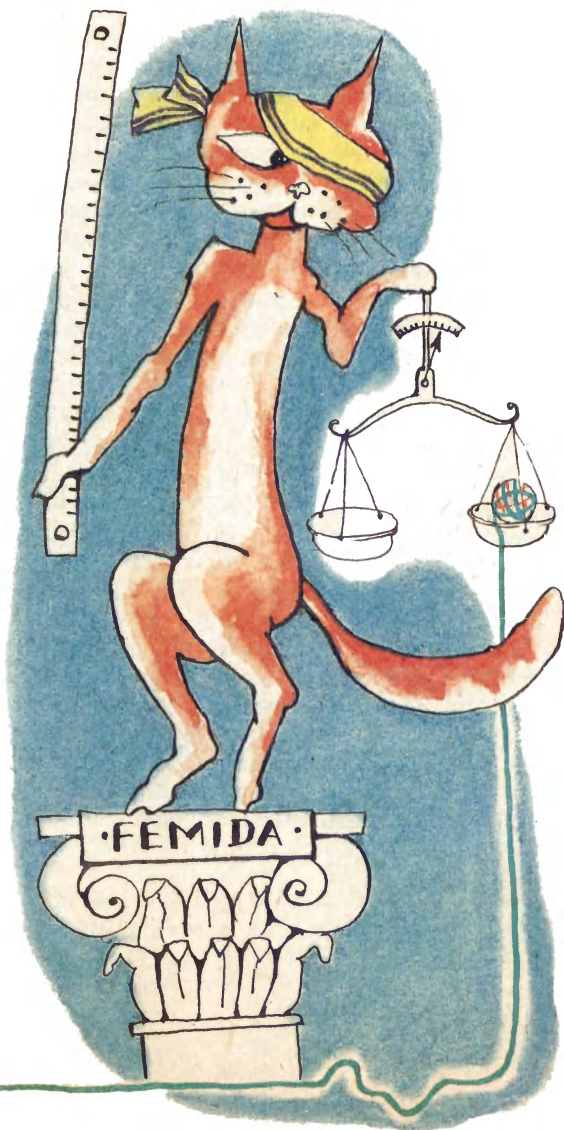
А как определить массы молекул газов, не входящих в состав атмосферы? Здесь на помощь приходит еще один закон природы. Было открыто (это сделал в 1811 г. итальянский ученый А. Авогадро), что в одинаковых объемах разных газов при одинаковых условиях содержится одно и то же число молекул. Значит, в 1 м^3 кислорода, или азота, неона, углекислого газа и т. д. при 0°C и нормальном атмосферном давлении (как и при других одинаковых условиях) содержится столько же молекул, что и в 1 м^3 водорода. В чем же тогда причина различия в плотностях этих газов? Почему, например, плотность неона, то есть масса одного кубического метра его, равна $0,9 \text{ кг/м}^3$, а плотность водорода — $0,09 \text{ кг/м}^3$, то есть в 10 раз меньше? Ответьте на этот вопрос и вычислите массу молекулы неона. Можно таким же образом вычислить массы молекул других газов (плотности газов даны в таблицах, например, в учебнике «Физика — 6»).

Вы могли убедиться, что массы молекул очень малы. Можно ли взвесить (в прямом смысле слова) одну или несколько молекул? Конечно,

нет. Казалось бы и не стоит принимать во внимание массу молекулы. Но все тела состоят из молекул, значит и массы тел складываются из масс молекул. И масса наименьшей из птиц — колибри, равная $1,7 \cdot 10^{-3}$ кг, и масса голубого кита, равная $150\,000 \text{ кг}$ — это сумма масс, составляющих эти тела молекул. Сколько же молекул содержится в телах?

Найдем, например, сколько молекул водорода содержится в детском «воздушном» шарике, если масса всего водорода в нем равна 3 г . Число молекул равно $3/3 \cdot 10^{-24} = 10^{24}$, то есть $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$.

Чтобы создать хотя бы какое то представление о величине этого числа, проведем еще один (последний!) расчет. Если в таком шарике сделать столь тонкий прокол, что через него будет выходить каждую секунду по $1\,000\,000$ молекул, то понадобится около 30 миллиардов лет, чтобы все молекулы вышли из шарика.



МОЖЕТ ЛИ БЫТЬ НЕВОЗМОЖНОЕ?

Л. И. Тучинский

Ответ на вопрос, поставленный в заголовке, может быть, по-моему, только один: конечно, может. Собственно говоря, мы привыкли к тому, что на наших глазах совершаются невозможные вещи, и даже не удивляемся им. Мы считаем само собой разумеющимся, что с аэродромов взлетают самолеты, что в космосе работают люди, что стоит нажать на кнопку телевизора — и моментально увидишь происходящее за тысячи километров, что существуют машины, умеющие считать и играть в шахматы, и многое другое.

А ведь если бы сто лет назад спросить у любого просвещенного человека, может ли человек полететь на Луну или увидеть, что происходит в другом городе, он бы удивленно посмотрел на вас, и наверное, усомнился в здравости вашего рассудка. Действительно, тогда это было невозможно, а сейчас все это стало обыденным.

Все это я говорю к тому, что никогда не следует категорически утверждать: это невозможно, этого не может быть. А, собственно, почему? Только потому, что этого не может быть никогда? И, главное, не думайте, что невозможное может сделать кто-то другой, но только не вы. «Может тот, кто думает, что может» — гласит латинская пословица.

Давайте для примера решим вместе одну задачу из разряда «невозможных». Эта задача из области материаловедения. Есть такая наука, которая занимается разработкой материалов, изучением их структуры и свойств.

Мы редко задумываемся о том, что без новых материалов не было бы полетов в космос, телевидения, лазеров, сверхпроводников, самолетов, машин... Когда в космос поднимается очередной аппарат, мы в первую очередь думаем о героизме космонавтов, о блистательной работе конструкторов и не подозреваем, сколько материаловедческих вопросов пришлось решить, чтобы этот запуск стал возможным. И так во многих делах. Труд материаловедов обычно остается в тени, но это вовсе не означает, что он менее важен или менее интересен, чем труд других специалистов. Большинство же материаловедческих проблем сводится к решению физических задач. И вот одна из них, поставленная жизнью.

Требуется создать материал, способный работать при температуре, превышающей температуру его плавления. Что значит работать? Это значит, что детали (например, сопла ракет), изготовленные из этого материала, должны иметь достаточную жесткость и прочность, чтобы выдерживать силы, действующие на них, практически не изменяя своей формы и размеров.

На первый взгляд задача абсурдна. Что значит — материал должен работать при температуре более высокой, чем его температура плавления? Что он должен нести нагрузку, находясь в жидком состоянии, или, как любят выражаться материаловеды, в жидкой фазе? Но жидкость не только нагрузки не может нести, она и формы не держит. Если нагреть деталь выше температуры плавления материала, из которого она изготовлена, она расплывется, станет бесформенной, и от нее останутся одни воспоминания. Все это так, но все-таки...

И все-таки задачу решить можно, и ваших знаний по физике вполне достаточно для этого. Но сначала несколько слов в качестве информации к размышлению.

Один из самых перспективных путей развития материаловедения — создание композиционных материалов, или композитов. Они включают в себя два или более материала и приобретают в результате такого объединения новые свойства. Типичный пример композита — железобетон (бетон, армированный металлическими прутья-

ми), в котором объединяются свойства бетона и стали. Или материал, полученный из порошков меди и графита, обладающий наряду с хорошей электропроводностью малым трением, что позволяет использовать его для скользящих контактов. Сегодня создано множество самых разнообразных композитов, их число с каждым годом растет, и это позволяет успешно справляться с решением проблем, ранее считавшихся неразрешимыми. Поэтому при анализе конкретных задач всегда полезно продумать вариант с применением композитов. Вот, пожалуй, и вся необходимая нам материаловедческая информация.

Что? У вас мелькнула мысль? Вы считаете, что если сделать композит из двух компонентов, один из которых легкоплавкий, а другой — тугоплавкий, то такой материал сможет работать при температуре более высокой, чем температура плавления легкоплавкого компонента? Но не выше же температуры плавления тугоплавкого компонента!

Должен вас огорчить. Я имел в виду работу материала именно при температурах, больших, чем температура плавления самого тугоплавкого компонента. Ну, не готовы ли вы заявить, что это из области фантастики?

Нет, это вполне реально. Такие материалы существуют, они успешно применяются в новой технике.

Что же это за материалы? Их называют псевдосплавами. Сегодня в космической технике широко используются псевдосплавы: вольфрам — медь, вольфрам — серебро, молибден — медь и другие. Прежде чем рассказать, как они устроены и работают, давайте вспомним кое-что из школьной физики.

При изучении агрегатных состояний вещества вы узнали, что процесс плавления чистых кристаллических веществ происходит при постоянной (для данного давления) температуре $T_{пл}$, называемой температурой плавления. Плавление твердого тела может происходить, только если к нему непрерывно подводить тепло. Количество теплоты, которое необходимо подвести для плавления к единице массы твердого тела при постоянной температуре $T_{пл}$, называется удельной теплотой плавления λ . Подобным образом происходит кипение жидкости.

Температура жидкости и сосуда, в котором она кипит, не повышается, однако все время жидкость превращается в пар. Количество теплоты L , необходимое для превращения единицы массы жидкости в пар при температуре кипения $T_{кип}$, называется удельной теплотой испарения, или парообразования.

Почему в процессе плавления и кипения температура не повышается? Потому что подводимое извне тепло тратится на увеличение внутренней энергии кристаллов (при плавлении) и жидкости (при кипении). Внутренняя энергия жидкости больше внутренней энергии кристалла, а внутренняя энергия пара больше внутренней энергии жидкости.

Когда не существовало холодильников, люди в жару хранили воду в пористых сосудах. Вода медленно просачивалась сквозь поры, испарялась с наружных стенок, охлаждая стенки сосуда и его содержимое...

Внимание! Вот он, ключ к решению задачи. «Осознай то, что уже знаешь...» Ведь это же нам давно известно: плавящиеся твердые тела и испаряющиеся жидкости отбирают тепло у соприкасающихся с ними тел. Этот эффект и лежит в основе работы псевдосплавов, используемых при высоких температурах.

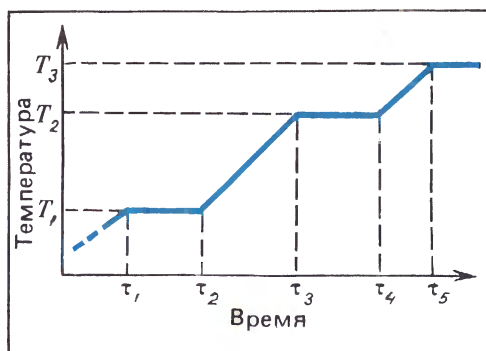
Представьте себе, что нам нужно изготовить сопло ракетного двигателя. Температура газов, образующихся при сгорании твердого топлива и истекающих из сопла, достигает 4000°C . Это выше, чем температура плавления самого тугоплавкого металла — вольфрама (3380°C). Что же сделать, чтобы сопло из вольфрама могло надежно работать при таких температурах?

Давайте поступим так. Изготовим сопло не из сплошного, монолитного, а из пористого вольфрама. Это можно сделать методом порошковой металлургии, когда вольфрамовый порошок прессуют и спекают. В результате таких операций получают вольфрам в виде пористой губки. Изменяя режимы прессования и спекания, можно регулировать количество и размеры пор. Затем пористый вольфрам надо пропитать легкоплавким металлом — медью или серебром. То, что получится, и будет псевдосплав вольфрам — медь или вольфрам — серебро.

Почему он называется псевдосплавом? Потому что это не настоящий сплав, у которого кристаллическая решетка состоит из разнородных атомов. Здесь перемешивания компонентов на атомном уровне не происходит. Вольфрам с медью или серебром не растворяются друг в друге, их невозможно сплавить, можно только механически смешать. В данном случае мы получили псевдосплав со структурой, представляющей собой вольфрамовый каркас, поры которого заполнены медью (серебром).

Что же будет происходить с таким материалом при нагревании? Приближенная картина, например в псевдосплаве вольфрам — медь, будет такой. Вначале температура композита станет расти (см. рисунок) до тех пор, пока не достигнет температуры плавления меди ($T_1 = 1083^\circ\text{C}$). Подвод тепла к псевдосплаву не вызовет повышения его температуры в течение времени, определяемого интервалом (τ_1, τ_2).

После того как вся медь расплавится, температура псевдосплава



вновь начнет повышаться. Но при температуре кипения меди $T_2 = 2595^\circ\text{C}$ вновь произойдет остановка, и пока вся медь не испарится, температура псевдосплава не повысится (интервал времени (τ_3, τ_4)). Температура газов, образующихся при сгорании топлива, может превышать температуру плавления вольфрама, но он плавиться не будет, потому что у него отнимает тепло кипящая медь, температура которой ниже температуры плавления вольфрама.



Конечно, сколь угодно долго такое положение сохраняться не будет. После того как вся расплавленная медь перейдет в пар, температура псевдосплава вновь начнет повышаться, и, когда она достигнет значения T_3 , равного температуре плавления вольфрама (3380°C), материал расплавится. Собственно говоря, расплавится не псевдосплав (его уже фактически не будет), а вольфрамовый каркас, который без меди работать при такой температуре не может. Вольфрам оказывается сильным до тех пор, пока есть у него пусть более слабый, но верный друг — медь, способная принести себя в жертву, испариться до последнего атома, чтобы облегчить судьбу своего друга.

Однако для дружбы между материалами, как и между людьми, нужна совместимость. Например, в высокотемпературных псевдосплавах хорошими друзьями вольфраму оказываются медь или серебро, но плохими — никель или железо. Дело в том, что медь и серебро отдают себя в жертву, не причиняя вольфраму вреда, а никель и железо не согласны погибать в одиночку. С повышением температуры они начинают интенсивно разъедать вольфрам. От этого резко падает прочность каркаса, он становится неработоспособным. Друзей нужно уметь выбирать.

Теперь давайте прикинем, что эффективнее отнимает тепло у материала — плавление или испарение. Очевидно, тот процесс, который требует больших затрат тепла.

Найдем в справочнике, чему равны удельная теплота плавления и испарения. Для подавляющего большинства материалов затраты на ис-

парение 1 грамма вещества оказываются во много раз больше, чем на плавление. Например, для воды $\lambda = 335$ Дж/г, а $L = 2260$ Дж/г, для меди $\lambda = 176$ Дж/г, а $L = 5240$ Дж/г. Таким образом, основную работу по спасению вольфрама от расплавления медь выполняет при своем испарении. Оно должно идти все время, пока материал находится в зоне мощных тепловых потоков.

Обычно в ракетах требуется, чтобы материал «продержался» в пределах нескольких минут, а этот ресурс сопла из псевдосплава вполне могут осилить. Возможны различные варианты деталей, позволяющие увеличить срок их службы. Например, можно представить себе соединенный с псевдосплавом резервуар с расплавленной медью — из него происходит подпитка медью, компенсирующая ее испарение из материала. Это, правда, уже технические детали, которые очень важны, но к принципиальному решению задачи отношения не имеют.

На самом деле в псевдосплавах происходят более сложные процессы, чем те, что я обрисовал. Материал неравномерно прогревается по толщине, в нем могут возникать большие термические напряжения, способные иногда вызвать появление трещин. Интенсивность испарения будет зависеть от размера и структуры пор, химической чистоты компонентов и ряда других факторов. Но это тоже частности. Важно, что мы нашли принципиальный путь решения задачи. Мы заставили материал работать в среде, температура которой выше температуры его плавления.

Оказывается, и невозможное возможно.

ВОДЯНЫЕ ПАРЫ

Д. Д. Алексеев

Как вы, конечно, знаете, воздух представляет собой смесь различных газов. Прежде всего это азот и кислород. Есть в воздухе и водяные пары. Правда, их вклад невелик: плотность паров воды в сотни раз меньше плотности воздуха. Но их присутствие определяет так называемую влажность воздуха. Самочувствие человека, рост и развитие растений, работа многих точных приборов и тому подобное сильно зависят от влажности воздуха.

Оказывается, количество водяных паров в воздухе не может быть произвольным. Существует предельная масса воды, которую при данной температуре можно испарить внутрь 1 м^3 воздуха. При дальнейшем добавлении происходит конденсация водяных паров, образуются водяные капельки. Чем выше температура, тем больше влаги содержится в воздухе.

Представьте себе, что днем количество воды в воздухе достигло предельного значения. Наступила ночь.

Температура воздуха понизилась, максимальная масса воды в воздухе уменьшилась. Очевидно, избыточное количество водяных паров образует водяные капельки — росу или туман.

Теперь проведите несколько самостоятельных наблюдений. Сначала сделайте опыт, не требующий много времени. Возьмите стеклянную банку и поднесите ее горлышко к носику кипящего чайника. Поставьте банку на стол вверх дном. Через некоторое время воздух в ней охладится, и выпадет обильная роса.

Пока воздух в банке охлаждается, посмотрите на носик кипящего чайника. Непосредственно у его края нет никакого видимого «пара». Почему? Пар, в правильном значении этого слова, увидеть вообще нельзя, потому что это прозрачная среда, как и большинство других газов. То, что обычно называют «паром», это туман — мельчайшие капельки жидкости, взвешенные в воздухе. На некотором расстоянии от носика кипящего чайника его действительно можно увидеть.

Несколько более длительный опыт можно выполнить на улице. Днем поставьте банку на землю вверх дном и слегка присыпьте горлышко землей. Ночью воздух станет более холодным, на стенках банки появится роса, в чем вы можете убедиться рано утром.



ПОЧЕМУ В ХОЛОДИЛЬНИКЕ СОХНУТ ПРОДУКТЫ?

Е. И. Пальчиков



Говоря точнее, надо было бы вопрос сформулировать так: «Почему в холодильнике продукты обычно сохнут быстрее, чем на открытом воздухе?» Давайте попробуем в этом разобраться.

Начнем с двух — безусловно, известных вам — фактов:

1. Холодный воздух тяжелее теплого (вспомните, почему?).

2. Чем теплее воздух, тем больше в нем может присутствовать воды в виде пара. (Как это можно объяснить?)

Воздух, как правило, соприкасается с какими-нибудь открытыми водоемами. В воде при любой температуре найдутся такие молекулы, которые сумеют вылететь с поверхности воды и образовать водяной пар. Одновременно с процессом испарения происходит и обратный переход молекул из пара в жидкость (конденсация). Очевидно, чем больше плотность пара, тем активнее идет конденсация. Если испарение воды происходит в ограниченном объеме (например, в закрытом сосуде), то обязательно наступит момент, когда число молекул, покидающих жидкость, сравняется с числом молекул, возвращающихся обратно. В таком случае говорят, что между жидкостью и ее паром наступает равновесие (количество жидкости и пара больше не изменяются). Пар в этом состоянии называют насыщенным, подчеркивая тем самым, что при неизменных условиях дальнейшее испарение уже невозможно.

Ясно, что чем выше температура, тем интенсивнее испаряется вода и тем большей, следовательно, должна быть

плотность водяного пара, чтобы наступило равновесие. Другими словами, чем выше температура, тем больше водяных паров может содержаться в данном объеме воздуха. Например, при 20°C в комнате площадью 12 м^2 и высотой 3 м может находиться в виде пара около 600 г воды, а при 100°C — около 20 кг !

Степень влажности воздуха (содержание в воздухе того или иного количества водяных паров) обычно характеризуют с помощью специальной физической величины — относительной влажности. Относительной влажностью воздуха называется отношение массы водяных паров, содержащихся в 1 м^3 воздуха, к максимальной массе паров воды, которая может находиться в этом объеме при данной температуре. Это отношение принято выражать в процентах. Если количество водяных паров в воздухе не изменяется, а температура воздуха повышается, то относительная влажность будет уменьшаться. И наоборот: при охлаждении воздуха его относительная влажность увеличивается. Как только она станет равной 100% , водяные пары начнут конденсироваться, «лишний» пар будет превращаться в росу или иней.

Теперь проследим, как же себя ведет воздух внутри холодильника. У холодильников морозильная камера обычно расположена наверху. Охлажденный возле камеры воздух опускается вниз. Соприкасаясь со стенками холодильника и с продуктами, он нагревается. При этом его относительная влажность уменьшается, а способность вбирать в себя воду увеличивается. Нагревшись и отобрав часть воды у продуктов, воздух поднимается к морозильной камере. Здесь он охлаждается до первоначальной температуры, но влажность его оказывается выше первоначальной (из-за отобранной у продуктов воды). Через некоторое число циклов влажность воздуха возрастает настолько, что, подойдя к морозильной камере, воздух будет вынужден оставить часть воды на камере в виде «осадка» — капелек воды или кристалликов льда.

Так с помощью воздуха вода «перекочевывает» от более теплых тел к более холодным — от продуктов к морозильной камере. При этом происходит очень эффективная перекачка

тепла: при испарении некоторое количество теплоты отбирается от продуктов и передается воздуху, а при конденсации оно отбирается от воздуха и передается морозильной камере. Разумеется, вода легче будет отбираться у более нагретых тел. Например, для испарения 1 г воды при температуре 0°C требуется количество теплоты около $2,59 \cdot 10^3$ Дж, а при 50°C — $2,38 \cdot 10^3$ Дж. (Столько же тепла выделяется при конденсации.)

Может возникнуть естественный вопрос: а как же охлаждаются «сухие» предметы? Ведь в этом случае отсутствует перенос воды и связанный с ним перенос энергии! Это действительно так. Но остается еще один процесс переноса энергии — при охлаждении и нагревании циркулирующего воздуха. Правда, «сухие» предметы охлаждаются гораздо медленнее, чем «влажные».



ЗИМНИЙ КАЛЕЙДОСКОП

А. А. Боровой



Когда мы идем по снегу...

В морозный день снег под ногами начинает скрипеть. Чем больше мороз, тем пронзительнее этот звук. Понаблюдайте сами: при температуре выше -5°C скрипа не слышно, а при морозе около -20°C он очень сильный. Что же скрипит у нас под ногами? Только ли снег обладает таким свойством?

Прежде чем начать разбираться с этими вопросами и поставить некоторые простые опыты, можно вспомнить одну любопытную историю о скрипящем снеге.

В июне 1938 г. на киностудии «Мосфильм» снимали кинофильм «Александр Невский». Основной эпизод фильма — битва на льду Чудского озера — Ледовое побоище. Снимать его пришлось в тридцатиградусную жару, когда никакого льда и снега не было и в помине. Тем не менее выход нашелся: большую площадку около павильонов Мосфильма засыпали смесью нафталина и соли, кое-где замазали белой краской. И тут актеры заметили удивительную вещь: когда они шли по искусственному снегу, он скрипел, как скрипит настоящий в сильный мороз.

Можно легко повторить этот опыт, насыпав на тарелку ровным слоем сахарный песок или соль. Если нажать ложкой на такой слой, будет слышен слабый скрип. Если смочить сахар или соль или слегка расплавить сахарный песок (например, на сковородке) — скрип прекратится.

Оказывается, скрип вызван трением и разрушением маленьких кри-

сталликов. Звук от разрушения одного кристаллика не слышен, но когда их разрушается много, снег, соль или сахар начинают скрипеть. Чем более твердыми и более хрупкими становятся кристаллы (снег при сильном морозе), тем сильнее звук. А если их размягчить (сахар на сковородке, смоченная соль, снег при температуре выше -5°C), скрип исчезает.

Когда мы катаемся на коньках...

Всем известно, что на коньках легко скользить по льду, а вот, скажем, по асфальту — почти невозможно. То же самое относится и к катанию на санках. Правда, чем ниже температура, тем хуже они скользят, и особенно это чувствуется при медленном движении.

Еще одно наблюдение, которое вы легко можете проверить на опыте, — на санках не зря делают полозья. Катить санки по льду значительно легче, чем гладкую доску такого же размера и веса.

Ученые давно уже объяснили все эти явления тем, что при катании на коньках снег на поверхности под давлением подтаивает и коньки скользят по тонкой пленке воды. Вода служит смазкой! При сильных морозах и при малом давлении воды становится меньше и скольжение ухудшается.

С незапамятных времен люди научились применять смазки, чтобы уменьшить трение. Эту роль могут выполнять самые различные материалы, иногда, казалось бы, совсем для такой цели не подходящие. Однажды в качестве смазки была использована... сталь.

В конце прошлого века английский промышленник Гарвей прислал в Россию образцы новых броневых плит для защиты кораблей. На испытаниях снаряды тяжелых орудий вместо того, чтобы пробивать плиты, сами разбивались о броню, не принося вреда тому, что могло скрываться за ней. Но вот русские попросили повторить испытания. И снаряды начали разбивать броневые плиты (а позже, после некоторых усовершенствований, пробивать в них отверстия).

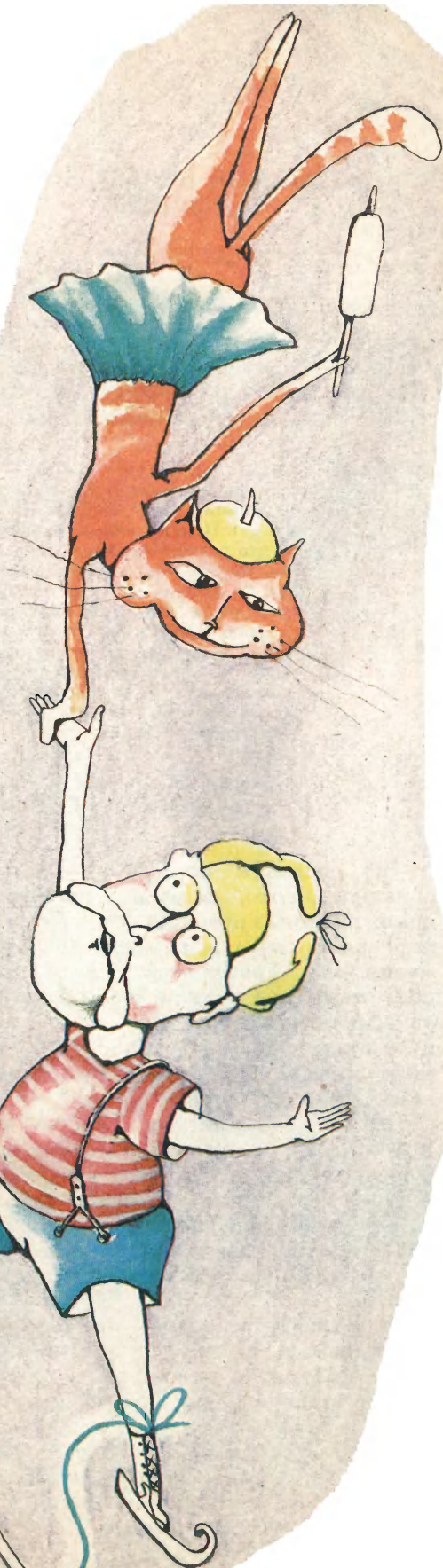
Все дело оказалось в том, что теперь снаряды были снабжены специальными колпачками из мягкой стали. Колпачок расплющивался,

плавился и, с одной стороны, мешал снаряду расколоться, а с другой — служил своеобразной смазкой при его прохождении сквозь броневую плиту. Изобретателем колпачка был талантливый русский ученый и моряк адмирал Макаров.

Когда мы едим мороженое...,

то можно вспомнить о том, что сначала способ его приготовления охранялся как большой секрет. Напрасно искусные повара при многих европейских дворах пытались использовать лед, хранившийся в погребах, чтобы заморозить взбитую смесь из сливок, сахара и фруктовых соков. Продукты охлаждались, но не замерзали.

Все дело оказалось в обычной соли. Достаточно поставить ведро с замораживаемой смесью в наколотый лед, перемешанный с солью, и получится превосходное мороженое. Сделайте и вы такой простейший опыт. Возьмите снег или истолченный лед и, перемешивая их, постепенно добавляйте соль (приятно, но обязательно, чтобы опыт сопровождался приготовлением мороженого). Если измерить температуру смеси, то она окажется около -20°C ! Происходит это потому, что при растворении соли поглощается тепло и это приводит к дополнительному понижению температуры.



МОЖНО ЛИ НОСИТЬ ВОДУ В РЕШЕТЕ?

А. А. Дозоров

«Один раз мы взяли с собой керосинку, но больше — никогда! Целую неделю мы как будто жили в керосиновой лавке. Керосин просачивался всюду. Я никогда не видел, чтобы что-нибудь просачивалось, как керосин. Мы держали его на носу лодки, и оттуда он просочился до самого руля, пропитав лодку и все ее содержимое. Он растекся по всей реке, заполнил собой пейзаж и отравил воздух».

(Джером К. Джером. «Трое в одной лодке, не считая собаки»)

Вы помните историю про муравьишку, который очень торопился домой? Многие помогали ему. Например, через речку его перевезла водомерка. Это — насекомое, и вы, наверное, много раз видели его. Водомерка совершенно спокойно стоит на воде и не тонет (рис. 1). Правда, если внимательно приглядеться, вода под ней немного прогибается.

Почему же это насекомое не тонет? И разве может вода прогибаться?

Оказывается, все дело в поверхностном слое жидкости. Он обладает целым рядом необычных свойств. Вы легко можете убедиться в этом, проделав несколько довольно простых опытов.

1. Налейте в тарелку немного воды. Возьмите иголку, лучше потоньше, и аккуратно положите ее на поверхность воды — иголка не тонет (рис. 2). Если опыт у вас не получился, не отчаивайтесь. Потрите иголку пальцами (или слегка смажьте ее маслом, или, еще лучше, потрите о свечку) и повторите опыт снова.

Посмотрите внимательно вдоль поверхности воды. Видите, что около иголки поверхность изогнута? Впечатление такое, как будто иголка лежит на пленке.

Это сравнение довольно хорошее. Поверхностный слой жидкости, и вправду, чем-то похож на растянутую упругую пленку (хотя происхождение особых свойств поверхностного слоя совсем иное, чем у растянутой пленки). Попробуем это пояснить.

В глубине жидкости каждая молекула со всех сторон окружена соседями, которые тянут ее во все стороны одинаково. Молекулы же поверхностного слоя сверху соседей не имеют, поэтому они испытывают притяжение со стороны нижележащих молекул. Жидкость стремится к тому, чтобы на ее поверхности было минимальное количество молекул. В результате поверхностный слой жидкости находится как бы в натянутом



Рис. 1

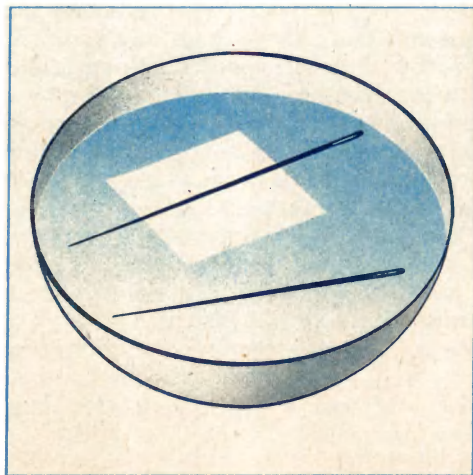


Рис. 2

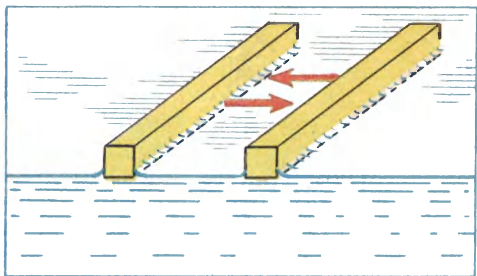


Рис. 3

состоянии, подобно упругой пленке. Иногда мы будем поверхность жидкости называть пленкой, но слово это будем заключать в кавычки.

Итак, не только водомерки, но и более плотные тела, в нашем опыте — металлическая иголка, держатся на

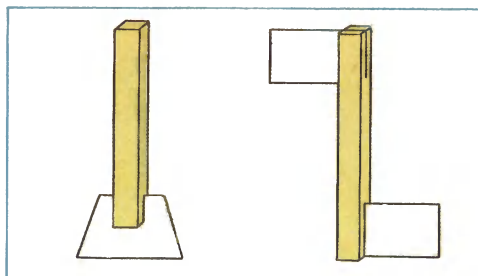
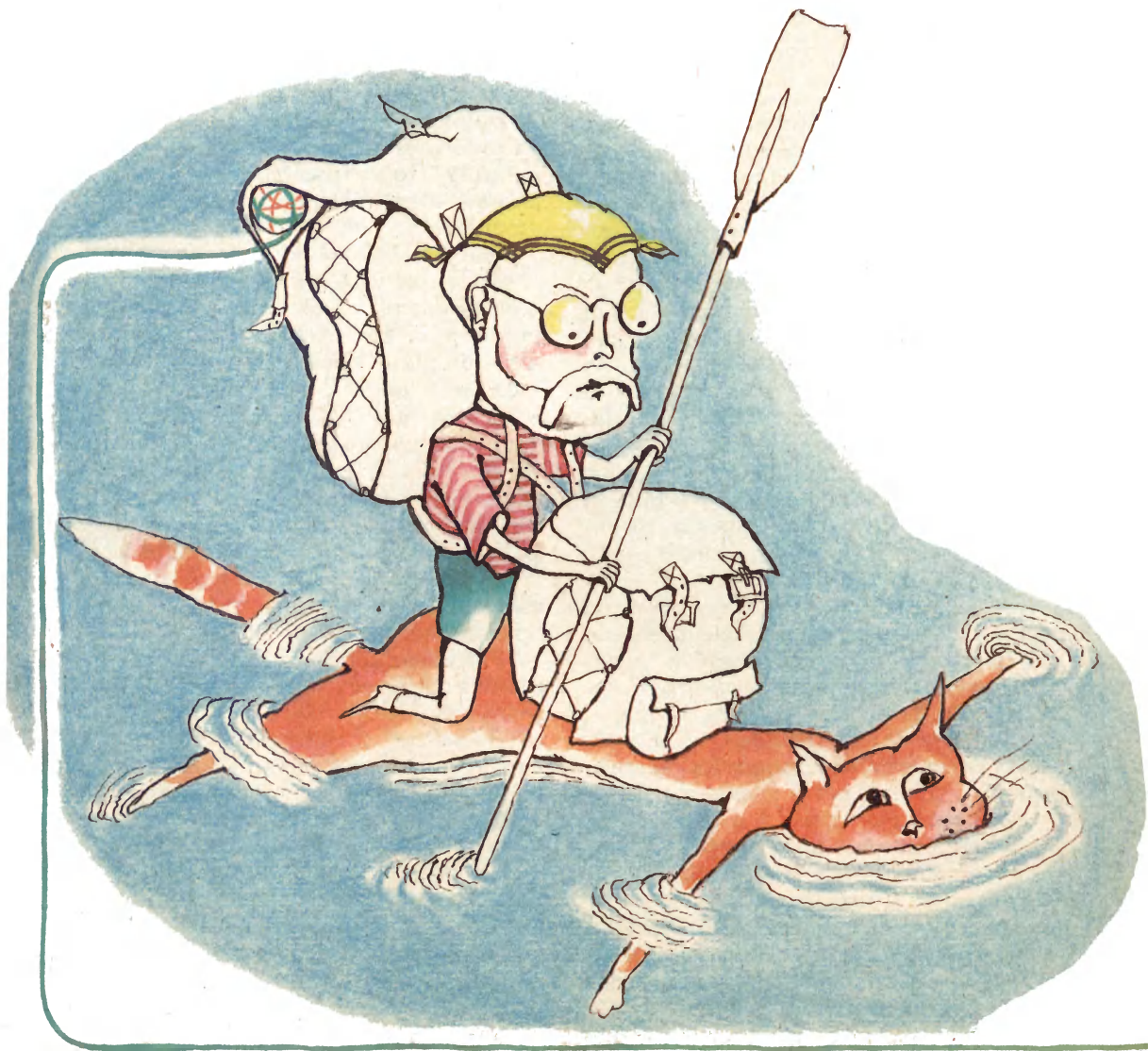


Рис. 4

Рис. 5

поверхности жидкости, причем они именно не «плавают» в обычном понимании этого слова, а удерживаются поверхностным натяжением жидкости.

Правда, если вы будете брать все более и более толстые иголки, то, на-



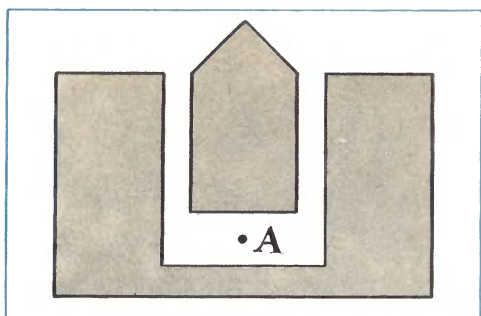


Рис. 6

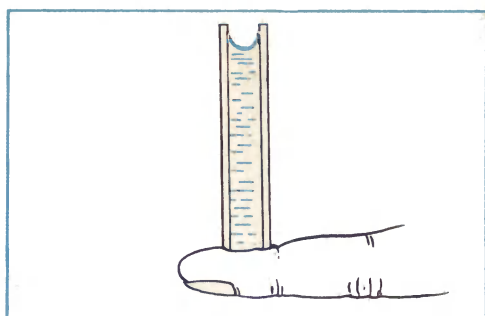


рис. 4

чаяняя с некоторого момента, сила тя- жести превысит силы поверхностного натяжения и иголки будут тонуть. (Интересно, что длина иголки практи- чески никакой роли не играет. По- чему?)

2. Оказывается, поверхностное на- тяжение «пленки» зависит от выбран- ной жидкости.

Положите иголку на поверхность воды. Возьмите спичку, отрежьте у нее головку (в основном — чтобы не перепачкаться), потрите кончик спич- ки о мыло и коснитесь им воды сбоку от иголки, на расстоянии примерно 1 см от нее. Иголка немедленно от- скочит от спички. Происходит это по- тому, что в мыльном растворе силы поверхностного натяжения слабее, чем в чистой воде. С разных сторон на иголку действуют разные силы, она движется в сторону действия большей силы. Принято говорить, что поверхностное натяжение чистой во- ды больше, чем мыльной.

Вы можете погонять иголку таким образом по всей тарелке. Обязательно подгоните ее к краю тарелки и повто- рите опыт. Как теперь ведет себя иголка?

Учтите, что мыло очень быстро распространяется по поверхности во- ды, так что почаще меняйте воду.

Вместо иголки на поверхность во- ды можно положить спичку и прово- дить опыты с ней. (Иголка, то и дело тонущая от неосторожных движений, сильно усложняет эксперименты.)

Возьмите две спички и аккуратно положите их на воду параллельно друг другу. Спички будут сближать- ся (рис. 3). Снова раздвиньте их и кончиком третьей спички, предвари- тельно потерев им о мыло, дотронь- тесь до воды с разных сторон от пла- вающих спичек. Что с ними будет происходить?

По такому же принципу можно сделать несколько нехитрых игрушек и показать их действие малышам.

Расщепите немного конец спички и вставьте туда кусочек бумаги (рис. 4). В мыльнице приготовьте из мыла кашицу и аккуратно обмокни- те в нее торец бумажки. Осторожно положите спичку на воду — спичка поплывет. Вы заметили, в какую сто- рону плывет спичка?

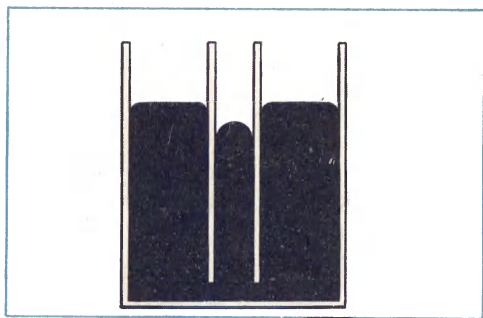
Теперь в оба конца спички вставь- те кусочки бумаги так, как показано на рис. 5, и обмокните их в мыльную кашицу. Положите спичку на поверх- ность воды — спичка начнет вра- щаться.

На рис. 6 показана модель пушки, которую вы можете вырезать из плот- ной бумаги. Чтобы эта пушка «вы- стрелила», достаточно мыльным кон- цом спички коснуться поверхности воды в точке А.

Попробуйте вместо мыла брать другие вещества. Как-то в пионерском лагере можно было наблюдать такую картину. Группа ребят обступила не- большую лужу. У них в руках были маленькие щепки. Концы щепок ребя- та мазали еловой смолой и устраивали гонки — щепочки быстро и замыс- ловато скользили по воде.

3. Поверхностное натяжение спо- собно поднимать жидкость на сравни- тельно большую высоту.

Возьмите стеклянную трубочку с очень маленьким внутренним диамет- ром ($d = 1$ мм), так называемый ка- пилляр. Опустите один из концов ка- пилляра в сосуд с водой — вода под- нимется выше уровня воды в сосуде. Чем тоньше капилляр, тем выше под- нимется вода по его стенкам. Если у вас когда-нибудь брали кровь из пальца, вы это уже видели — лабо- рант собирает в капилляр капельки крови.



Капиллярные явления можно наблюдать повсюду. Это поднятие воды по мельчайшим отверстиям в куске сахара, поднятие керосина по фитилю в керосиновой лампе, всасывание влаги из почвы корнями различных растений и т. п.

Более скромный опыт можно сделать и с не очень тонкой трубкой. Наберите в нее воду и пальцем закройте нижний конец трубки (рис. 7). Вы увидите, что уровень воды в трубке изогнут. Это результат того, что молекулы воды сильнее притягиваются к молекулам стенок сосуда, чем друг к другу. В таком случае говорят, что жидкость смачивает твердое тело.

Сделайте еще один опыт. Выпив чай, оставьте на дне чашки немного жидкости с чайинками. Чайной ложкой или спичкой осторожно коснитесь поверхности жидкости. Она тотчас же «поползет» вверх, увлекая за собой чайинки.

4. Не все жидкости и не во всяких трубках «цепляются» за стенки. Бывает и так, что жидкость в капилляре опускается ниже уровня в широком сосуде, при этом ее поверхность — выпуклая. Про такую жидкость говорят, что она не смачивает поверхность твердого тела. Притяжение молекул жидкости друг к другу сильнее, чем к молекулам стенок сосуда. Так ведет себя, например, ртуть в стеклянном капилляре (рис. 8).

Наберите в пипетку немного воды. Осторожно капните одну капельку на чистое стекло, а вторую — на хлеб, намазанный сливочным маслом. Первая капелька растечется по стеклу, а вторая (на сливочном масле) — нет. Вывод — вода смачивает стекло, но не смачивает масло.

Как вы ответите на известный вопрос: можно ли носить воду в решете? Возьмите решето, смажьте его маслом



или лучше натрите свечкой. Влейте в решето немного воды — она не вытекает! Оказывается, воду держит поверхностная «пленка», образовавшаяся из-за несмачивания водой ячеек решета. Если у вас нет решета, можно взять, например, терку или консервную банку, в которой гвоздиком пробиты мелкие дырочки.

Вы уже видели, что несмачивающаяся жидкость не растекается по поверхности, а собирается в каплю, причем чем меньше жидкости, тем форма капли ближе к сферической. Почему? Благодаря сильному притяжению молекул жидкости друг к другу жидкость принимает форму с наименьшей поверхностью. А это, как правило, сферическая поверхность.

Последнее очень наглядно демонстрируется в состоянии невесомости. Если космонавт выпустит воду из сосуда (в невесомости нельзя сказать «выльет» в том смысле, как это понимается на Земле), она примет форму шара. Кратковременное пребывание расплавленного металла в состоянии невесомости во время падения с большой высоты издавна используется для производства дробин. Капли жидкого металла, падая, приобретают форму шарика и, остывая, сохраняют ее. Так получают дробинки.



Аналогичный опыт вы можете провести и в домашних условиях. Покапайте стеарин с горящей свечи в таз с холодной водой — вы получите маленькие «дробинки». Свечку лучше держать как можно ближе к воде, тогда стеарин будет остывать именно на поверхности воды.

5. Поверхностное натяжение иногда оказывает столь сильное действие, что его можно ощутить (в буквальном смысле этого слова) руками.

Возьмите две одинаковые стеклянные пластинки. Протрите их хорошенько и приложите друг к другу. Они легко разъединяются. Теперь одну из пластинок смочите водой и сложите пластинки. Разъединить их очень трудно (если только не перемещать пластинки параллельно друг другу). Это результат действия поверхностного натяжения.

Итак, на простых опытах вы познакомились с особенностями поверхностного слоя жидкости. Подобных экспериментов можно провести очень много. Но имейте в виду, что всегда больше всего нравится тот опыт, который вы придумали сами.



ОГОНЬ В РЕШЕТЕ

Т. С. Петрова

Опыт, который мы предлагаем вам проделать, — почти фокус. Чтобы показать этот фокус, вам потребуется гладкий металлический стержень, бумага, свечка и спички.

Вырежьте узкую полоску бумаги и намотайте ее винтом на металлический стержень. Сделать это надо так, чтобы бумага везде плотно прилегала к металлу. Теперь зажгите свечку и внесите в ее пламя стержень, обмотанный бумагой. Бумага не горит! Уже руке горячо держать стержень, а бумага не горит. И пройдет достаточно времени, пока она загорится.

В чем же дело? Ведь бумага «сама по себе» прекрасно горит.

Объясняется этот «фокус» высокой теплопроводностью металла. Металлический стержень быстро «отнимает» тепло у бумаги и в течение нескольких минут не дает ей нагреться до такой температуры, при которой она может загореться.

Свойство металлов хорошо проводить тепло очень наглядно демонстрируется и таким опытом. Возьмем сделанную из медной проволоки сетку (в местах переплетения проволоочки должны соприкасаться очень плотно). Поместим эту сетку над газовой горелкой. Если при открытом кране горелки вы зажжете газ над сеткой, то газ под сеткой не воспламенится. Если зажечь газ под сеткой, то через сетку пламя не «просочится».

Теперь вы, вероятно, уже сами сможете объяснить, почему это происходит.

В те времена, когда еще не было электрических шахтерских лампочек, шахтеры пользовались так называемой лампой Дэви. В самом простом виде — это свеча, «посаженная» в маленькую металлическую клетку. И даже если шахта полна легко воспламеняющимися газами, горящая лампа Дэви не вызовет взрыва.



ГЕЙЗЕРЫ

Н. А. Минц

Гейзеры*) — горячие источники, в которых через определенные промежутки времени происходят извержения кипятка. Извержение большого гейзера — очень красивое зрелище. Со взрывом и грохотом столб кипящей воды, окутанный паром, взлетает фонтаном вверх, рассыпаясь на большой высоте. Фонтан бьет некоторое время, затем вода исчезает, пар рассеивается, и все успокаивается. Обычно вокруг гейзера есть бассейн, диаметром иногда в несколько метров. Земля около гейзеров бывает теплая или даже горячая, так как гейзеры расположены в местах активной вулканической деятельности.

Если взглянуть в бассейн гейзера после извержения, можно увидеть, что воды в нем нет, а в дне имеется отверстие — канал, уходящий в глубину. Перед началом извержения вода поднимается по каналу, заполняет бассейн, бурлит, выплескивается, а затем взлетает фонтаном кипятка. Когда извержение прекращается, вода снова уходит в трубку гейзера. Например, у Большого гейзера в Исландии диаметр трубки 3 м, глубина 23 м. На поверхности Земли трубка заканчивается бассейном шириной 16 м и длиной 18 м.

Внутренняя поверхность трубки и бассейна выстлана очень ровным слоем кремнезема, такого твердого, что ударами молотка его не разбить. Отложения кремнезема называются гейзеритом. Около некоторых гейзеров образуются конусы из гейзерита вы-

сотой от нескольких сантиметров до нескольких метров.

Как же образовалась эта удивительная трубка? Как появилась облицовка трубки и бассейна?

Можно предположить, что это связано с отложениями веществ, содержащихся в воде. Однако вода гейзера не дает осадка; налитая в бутылку, она годами остается чистой. И только если выпаривать воду в испарительной чашке, то по краям, там, где испарение идет быстрее, будет отлагаться кремнезем, образуется кремнистое кольцо. В середине даже после продолжительного кипячения вода может только помутнеть.

Теперь представьте себе теплый источник, вода которого стекает по небольшому склону. Растекаясь, вода быстро испаряется, и кремнезем оседает. Этот осадок постепенно возвышает ложе, по которому течет вода. Таким образом, увеличивается глуби-

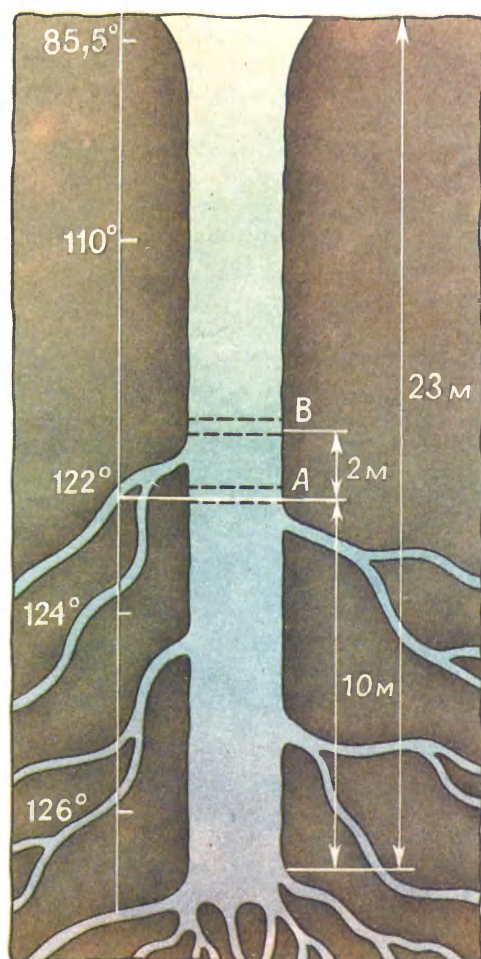
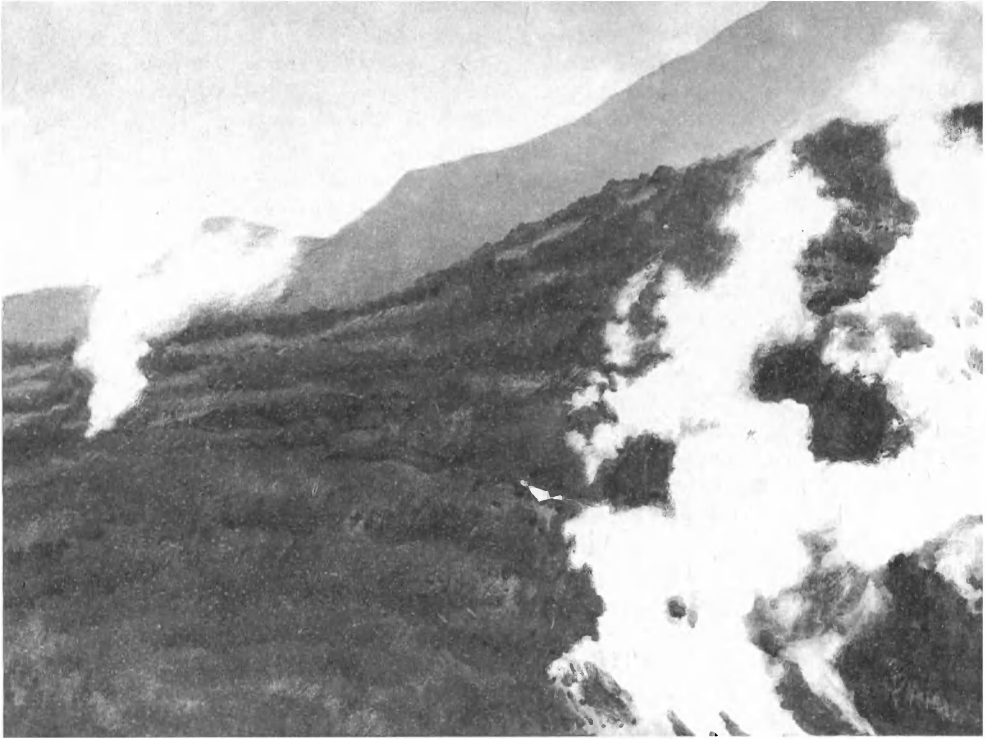


Рис. 1

*) Гейзер — производное слово от geyza (исл.) — хлынуть.



на колодца источника, пока, наконец, не образуется трубка и бассейн.

Но какие силы заставляют горячую воду бить фонтаном?

Первые объяснения работы гейзера были основаны на гипотезе существования большого подземного бассейна, лишь отчасти заполненного водой. Вода в подземном бассейне разогревается за счет внутреннего тепла Земли и кипит. Образующиеся пары поступают в трубку, которая заполнена водой из подземных каналов. Пар из бассейна поднимается по трубке, увлекает за собой воду, находящуюся в трубке, и заставляет ее выплескиваться вверх фонтаном. Однако экспериментальные исследования это не подтвердили.

Механизм действия гейзера впервые был объяснен в XIX веке Г. Бунзенем, который исследовал гейзеры в Исландии. Оказывается, подземный бассейн совсем не нужен. Трубки, созданной источником, вполне достаточно для того, чтобы произошло извержение гейзера.

Бунзен измерял температуру воды в гейзере, опуская в трубку термометр и отмечая каждый раз глубину погружения термометра. На рис. 1 при-

ведены полученные им результаты. Видно, что по мере продвижения в глубь трубки гейзера температура повышается. У вершины гейзера температура была $85,5^{\circ}\text{C}$, у основания она возросла до 126°C .

Отчего же вода в гейзере не кипит, несмотря на то, что ее температура превышает 100°C ?

Известно, что температура кипения воды зависит от давления. При понижении давления температура кипения уменьшается, а при повышении давления — увеличивается. На вершине высокой горы вода кипит примерно при 80°C . В трубке гейзера, наоборот, температура кипения выше 100°C , потому что там давление больше атмосферного на величину давления столба воды в трубке. Этот избышек давления и не позволяет воде кипеть. Ни в одном месте трубки температура воды не достигает температуры кипения, соответствующей давлению в этом месте.

Перед извержением временами слышатся взрывы, и каждый взрыв сопровождается сильным волнением в бассейне. По-видимому, это происходит оттого, что по боковым протокам в трубку гейзера поступает вода

и перегретый пар. Пар, смешиваясь с более холодной водой в трубке, отдает воде свое тепло. Может произойти испарение какого-то количества воды, тогда из-за резкого расширения пара возникает взрыв. Часть воды, перетекая из трубки в бассейн, вызывает в нем волнение.

В промежутках между извержениями температура воды в трубке постепенно повышается, но даже перед самым извержением она нигде не достигает температуры кипения.

Как же происходит извержение?

Ключ к разгадке этого явления дают наблюдения Бунзена. Ему удалось измерить температуру воды за несколько минут до извержения. Оказалось, что температура воды, находящейся несколько ниже середины трубки, лишь двумя градусами ниже температуры кипения в этом месте трубки. Так, действительная температура воды в 10 метрах от дна гейзера была 122°C , а температура кипения с учетом давления воды в этом месте должна быть 124°C .

Как уже говорилось, перед извержением наблюдаются взрывы, обусловленные притоком пара из подземных каналов в трубку гейзера и сопровождающиеся поднятием водяного столба. Пусть пар вошел в трубку на высоте 10 м над дном и поднял воду, находившуюся на уровне *A*, до уровня *B*, расположенного двумя метрами выше (см. рис. 1). Давление в этом месте трубки уменьшается на величину давления двух метров воды, вытекшей в бассейн *). Температура кипения при уменьшенном давлении будет 121°C . Следовательно, настоящая температура воды на уровне *A* (122°C) уже превышает температуру кипения на один градус. Вода в трубке сразу начинает кипеть, образуется пар, который еще выше поднимает воду и заставляет ее выливаться в наружный бассейн. Давление на нижние слои воды еще заметнее уменьшается, кипение идет все более бурно, паров

образуется все больше и больше. Внезапно начинает кипеть вся масса воды, находящаяся в самой нижней части трубки; тогда верхние слои воды выбрасываются вверх с громадной скоростью, и происходит извержение гейзера.

Выброшенная вода снова падает в бассейн, охлаждается и через некоторое время начинает вливаться обратно в трубку, постепенно заполняя ее. Извержение кончилось. Время от времени слышатся взрывы, видно волнение воды, но следующий выброс начнется только тогда, когда температура воды в трубке приблизится к температуре кипения.

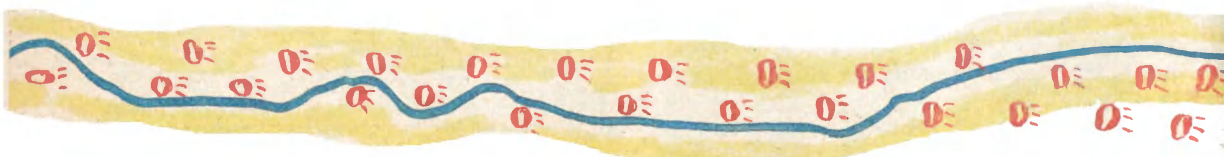
Извержения природного гейзера не могут продолжаться бесконечно. Когда трубка достигнет такой длины, что температура воды в нижних слоях из-за слишком большого давления уже не сможет дойти до температуры кипения, извержения должны прекратиться. Источник тем не менее продолжает откладывать кремнезем, и образуется красивый водоем. Глубина некоторых таких водоемов от 10 до 12 м.

Уже было сказано, что температура воды в трубке гейзера во время «отдыха» нигде не достигает температуры кипения. Следовательно, пар, производящий взрывы и поднимающий водяной столб, должен образовываться в боковых каналах, питающих трубку. Но гейзер может «работать» и без этих каналов, если несколько ниже середины его трубки есть дополнительный приток тепла. Это можно показать на действующей модели гейзера, которую нетрудно сделать самим. Общий вид установки такого искусственного гейзера изображен на рис. 2.

Нужно взять двухметровую металлическую трубку и установить ее вертикально. В верхней части трубки следует укрепить сосуд, достаточно большой, чтобы горячая вода не разбрызгивалась, а собиралась в сосуде

*) Весом пара можно пренебречь, так как его плотность намного меньше плотности воды.

и могла стекать обратно в трубку. Вся конструкция должна быть на-



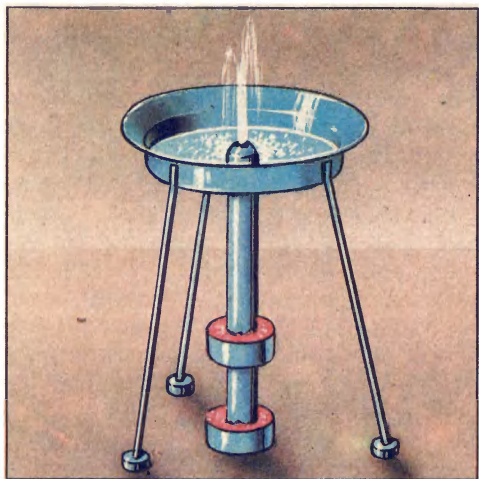
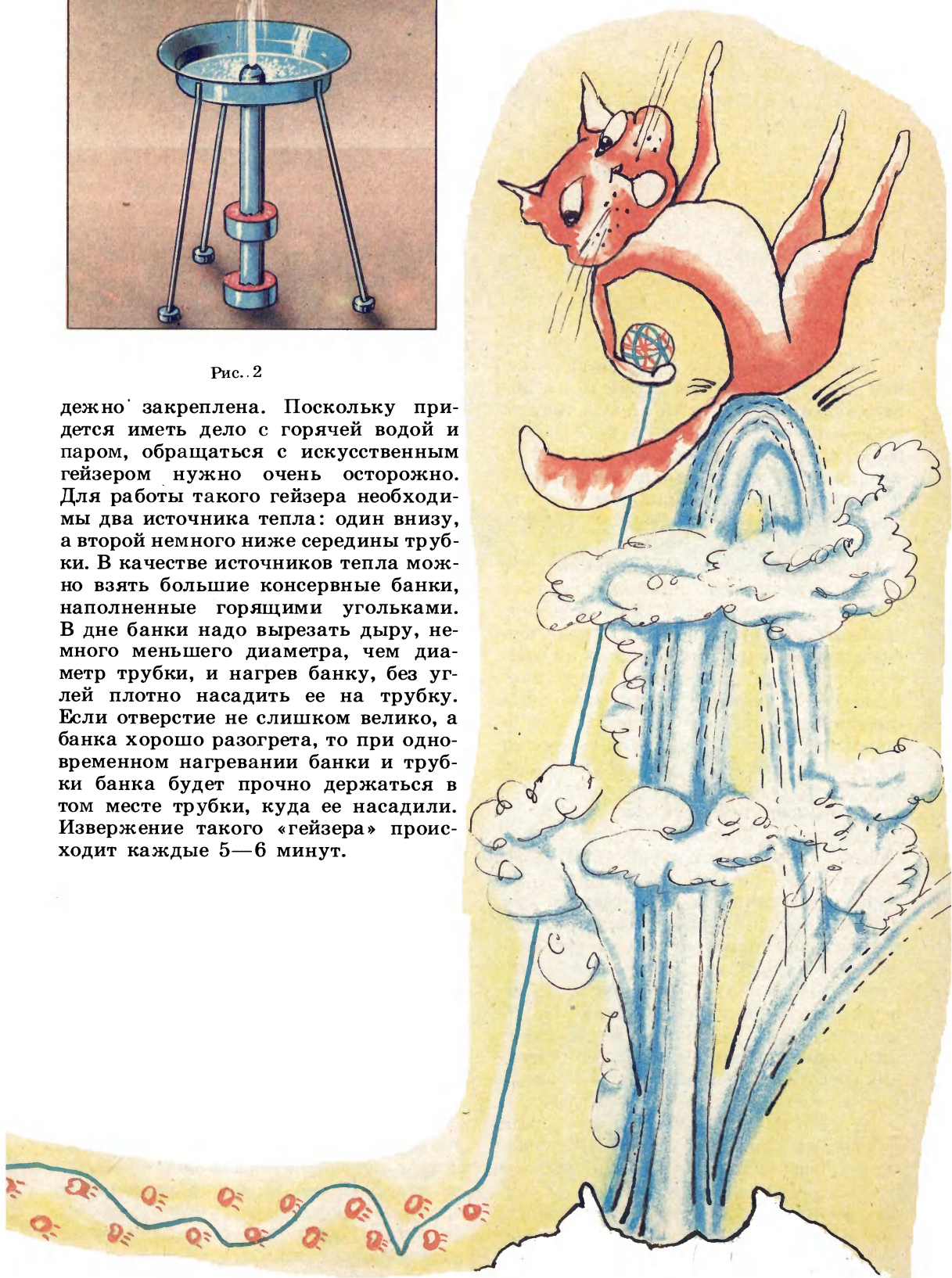


Рис. 2

дежно закреплена. Поскольку придется иметь дело с горячей водой и паром, обращаться с искусственным гейзером нужно очень осторожно. Для работы такого гейзера необходимы два источника тепла: один внизу, а второй немного ниже середины трубки. В качестве источников тепла можно взять большие консервные банки, наполненные горящими угольками. В дне банки надо вырезать дыру, немного меньшего диаметра, чем диаметр трубки, и нагрев банку, без углей плотно насадить ее на трубку. Если отверстие не слишком велико, а банка хорошо разогрета, то при одновременном нагревании банки и трубки банка будет прочно держаться в том месте трубки, куда ее насадили. Извержение такого «гейзера» происходит каждые 5—6 минут.



КАК МОЕТ МЫЛО?

Л. Г. Асламазов

Вы, наверное, не раз наблюдали, как ведут себя капельки воды на поверхности стекла. Если стекло чистое, то капельки растекаются на его поверхности. А вот загрязненную поверхность стекла вода не смачивает. Капелька стремится сохранить свою форму и лишь слегка сплющивается в месте соприкосновения.

Оказывается, что моющее действие мыла объясняется похожим эффектом. При растворении даже незначительного количества мыла в воде оно скапливается (адсорбируется) на границе воды с отмываемой поверхностью или тканью. В результате ослабляется прилипание частиц жира и грязи к ткани. Тонкая пленка мыла на поверхности, например, жировой капли не дает ей возможности смачивать поверхность ткани.

На рис. 1 показана серия увеличенных фотографий шерстяной нити. На первой фотографии — нить, испачканная жидким парафином. Три следующие фотографии показывают очищающее действие раствора стирального порошка. Ясно видно, как увеличивается угол, образуемый поверхностью парафина с нитью. Парафиновый жир сворачивается в шарики и уносится водой. На самой нижней фотографии показана уже совсем чистая нить.

Адсорбированные молекулы мыла окружают капельки жира и отмываемую поверхность плотно заполненным одинарным (мономолекулярным) слоем, который обладает высокой механической прочностью. Молекулы мыла сильно связаны друг с другом, и разорвать пленку очень трудно. По-

этому при стирке пленки из адсорбированных молекул не разрушаются и препятствуют обратному прилипанию уже оторвавшихся капелек жира к поверхности ткани и слиянию капелек друг с другом. Взвешенные в воде частички грязи и капельки жира удаляются вместе с ней.

Интересно, что образование устойчивой пены — это только побочный эффект при растворении моющих веществ. Пена образуется из пузырьков воздуха, которые попадают внутрь воды (при перемешивании со струей воды). Затем они всплывают к ее поверхности и оказываются окруженными пленкой жидкости и адсорбированным слоем мыла. Образованию устойчивой пены способствует высокая прочность мыльных пленок.

Механизм моющего действия, который был здесь разобран, представляет интерес и в связи с другими важными техническими задачами — покрытием поверхностей лаками и красками, оклеиванием, окраской тканей суспензиями, изготовлением непромокаемых тканей. Например, для того чтобы сделать ткань водоотталкивающей, ее обрабатывают специальным веществом, которое образует вокруг каждого волокна тонкую пленку. В результате вода не смачивает ткань, а собирается на ней в капли, которые скатываются с материала (рис. 2).

Адсорбционные пленки используют для уменьшения испарения воды с поверхности водоемов, что является важной проблемой в засушливых районах. Для создания защитных пленок применяют специальное вещество — гексадеканол. В обычных условиях это — твердое вещество, оно плавает на поверхности воды и возле него образуется защитный слой.

Поверхность жидкости похожа на упругую растянутую пленку и всегда стремится уменьшить свою площадь. Поэтому на границе области с гексадеканолом возникают силы поверхностного натяжения: со стороны чистой поверхности воды, стремящиеся уменьшить эту поверхность (и тем самым растянуть защитный слой), и со стороны самой адсорбированной пленки, стремящиеся уменьшить ее площадь. Будет ли защитная пленка растягиваться или сжиматься, зависит от соотношения этих сил.

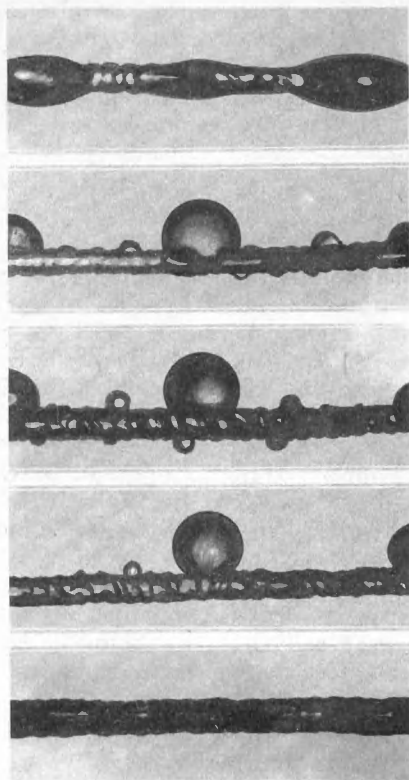


Рис. 1

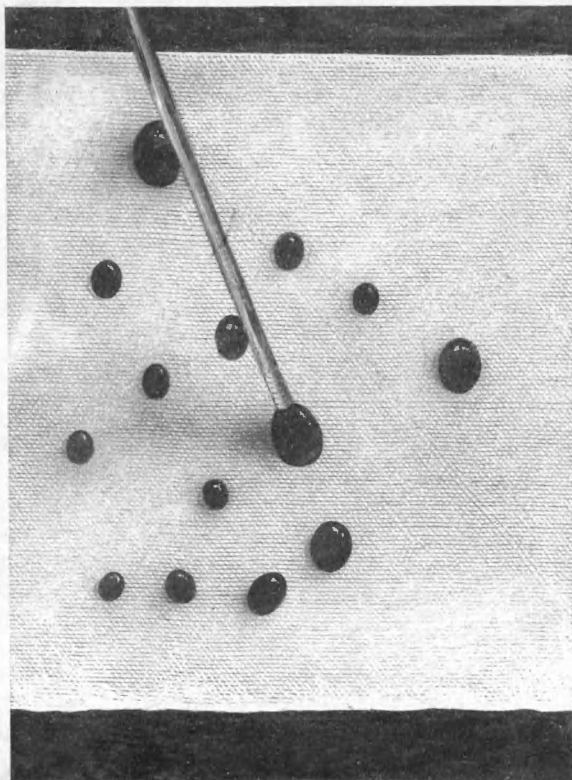


Рис. 2

Адсорбция уменьшает поверхностное натяжение. Поэтому силы поверхностного натяжения самой пленки меньше, чем у чистой поверхности воды, и пленка растягивается на всю площадь водоема. Если вся поверхность воды покрыта адсорбированным мономолекулярным слоем, то вещество не расходуется. Однако стоит пленке где-либо испортиться, как поверхностное натяжение в этом месте увеличится, стянет пленку с соседних участков и т. д. В результате нарушается пленка и возле плавающего кусочка вещества, которое и восстанавливает пленку.

Было найдено, что для создания защитной пленки на площади 1 га необходимо около 20 г гексадеканола, а потери в среднем равны 2—3 мономолекулярным слоям в день. Поэтому расход вещества для поддержания пленки составляет всего около 60 г в день на 1 га, и такой способ оказывается экономически выгодным. Например, в Австралии с его помощью ежегодно сохраняется около 10 миллионов литров воды с каждого гектара водной поверхности.



ДОМ, КОТОРЫЙ ПОСТРОИЛ...

А. В. Токарев

Выдающийся итальянский архитектор XVI века Андреа Палладио считал, что в каждой постройке должны быть соблюдены три вещи, без которых ни одно здание не может заслужить одобрения. Это — польза (и удобство), красота и долговечность. Оставим в стороне соображения удобства и красоты и поговорим о долговечности, или, другими словами, о надежности постройки.

Наверное, каждый из вас знает, что строительство любого сооружения начинается с закладки фундамента. Хороший, прочный фундамент — залог дальнейшего успеха. Но что это значит — прочный фундамент?

Много вопросов приходится решать специалистам. Один из них — борьба с осадкой фундамента. Особые трудности, связанные с этой проблемой, возникают при возведении сооружений на вечной мерзлоте. Построенные там дома часто дают трещины из-за неравномерной осадки фундамента, вызванной подтаиванием грунта под ним.

Можно ли избежать подтаивания грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, или хотя бы уменьшить подтаивание?

Давайте попытаемся решить эту задачу, исходя только из знаний простейших физических законов и закономерностей.

Прежде всего, проанализируем условие задачи. Почему грунт под домами может начать подтаивать? Очевидно, потому, что фундамент передает ему некоторое количество теплоты. Значит, все дело в фундаменте. Тогда первое, что напрашивается сде-

лать, это уменьшить площадь соприкосновения фундамента с грунтом. Именно с этой целью здания стали строить на сваях, отказавшись от привычного сплошного фундамента. Но этого оказалось недостаточно.

Как еще можно уменьшить приток тепла к грунту?

Так как тепло передается по сваям, то, следовательно, материал сваи должен проводить тепло как можно хуже.

Из чего же нужно делать сваи?

Из твердых материалов малой теплопроводностью обладают, например, вата и пробка, затем идут дерево и кирпич. Однако прежде всего свая должна быть прочной, так что все перечисленные материалы явно не подходят.

А что если сваю сделать из металла, например из железа, и внутрь ее поместить вату, войлок или какое-то другое пористое вещество, содержащее много воздуха? Это — выход!

Итак, свая должна быть изготовлена из прочного твердого материала и заполнена каким-либо пористым веществом.

Анализируя полученный результат, делаем вывод: благодаря малой теплопроводности, свая указанной конструкции действительно уменьшит приток тепла от окружающего воздуха к грунту (то есть сверху вниз) в теплое время года. А в холодное? Хорошо бы сделать так, чтобы зимой, во время сильных морозов, свая способствовала охлаждению грунта (то есть передавала бы тепло снизу вверх). Это увеличило бы прочность грунта и уменьшило степень его подтаивания летом.

Сформулируем более четко, какие же физические процессы происходят в свае и в грунте около нее летом и зимой. В теплое время года верхняя часть сваи, соприкасаясь с воздухом, нагревается. Постепенно будет нагреваться и та часть сваи, которая находится в земле. Чем меньше нагреется нижний конец сваи, а значит, и прилегающий к ней грунт, тем лучше. Зимой верхняя часть сваи охлаждается от соприкосновения с холодным воздухом. Постепенно охлаждается и нижняя часть сваи, и грунт вокруг нее. Чем ниже температура, до которой охладится грунт, тем лучше.

Таким образом, свая должна обладать следующими свойствами:

а) если температура верхней части сваи выше, чем нижней, то свая должна проводить тепло плохо;

б) если верхний конец сваи холоднее нижнего, то свая должна проводить тепло хорошо.

Или, другими словами:

сверху вниз передача тепла должна происходить плохо, а снизу вверх — хорошо.

Наша предыдущая модель — металлическая свая, заполненная пористыми материалами, для этих целей не годится (пористая «внутренность» сваи будет плохо проводить тепло не только летом, но и зимой, когда желательно, чтобы грунт хорошенько охладился).

А что если прочную оболочку сваи, способную выдержать большую нагрузку, заполнить жидкостью?

Зимой верхние слои жидкости или газа будут охлаждаться и, как более плотные, будут опускаться вниз. Их место займут менее плотные нижние слои, которые будут, в свою очередь, охлаждаться и опускаться вниз и т. д. В результате свая и грунт вокруг нее примут температуру окружающего воздуха, то есть будут охлаждаться за счет естественных морозов. В летнее время верхние слои жидкости или газа будут, конечно, нагреваться окружающим воздухом, но, как менее плотные, опускаться вниз они не будут. Передача тепла будет осуществляться только за счет теплопроводности, а она у жидкостей мала.

Значит, свая такой конструкции летом будет проводить тепло плохо, и грунт вокруг нее прогреется незначительно.

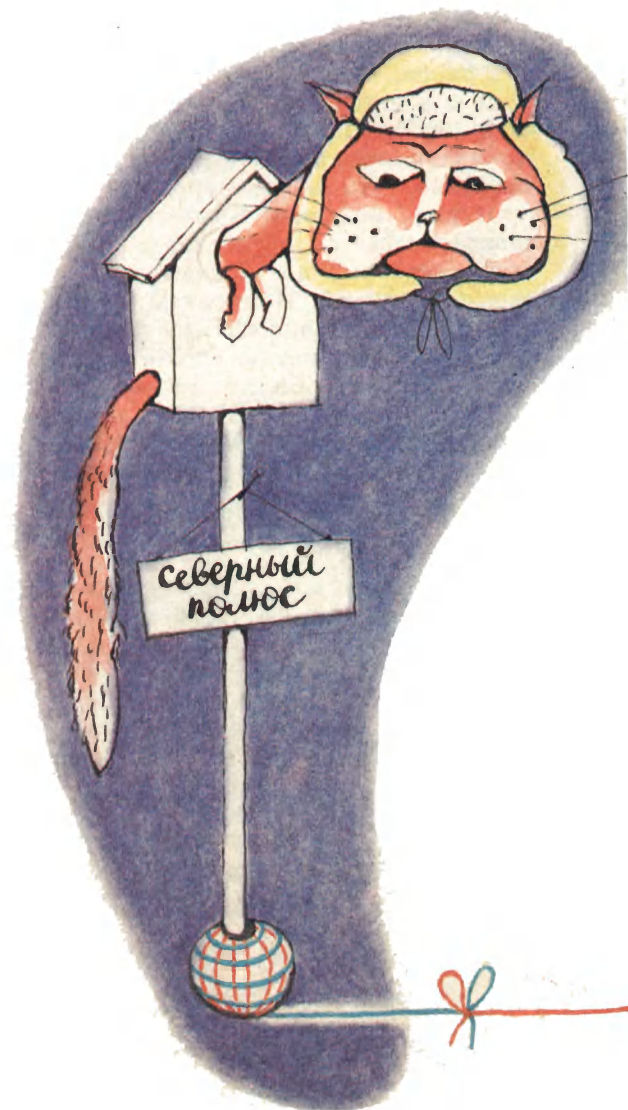
Итак, мы приходим к выводу: сваю, изготовленную из прочного материала, необходимо заполнить жидкостью. Но какой? Вода, хотя и самая дешевая и доступная, не подходит, поскольку она зимой замерзает. Глицерин и машинное масло при низких температурах густеют. Можно взять, например, керосин. Он замерзает при температуре ниже -50°C , так что мог бы «выдержать» суровые зимние морозы.

Итак, чтобы уменьшить подтаивание грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, здания можно строить на сваях, а сваи, изготов-

ленные из прочного твердого материала, внутри заполнять керосином.

Заметим, что такой способ укрепления мерзлых оснований (уменьшения подтаивания грунта под фундаментом) — не фантастика. Он детально разработан и даже испытан.

Вот какие необычные инженерные решения помогает находить физика.



6. ПОБЫВАЕМ В МИРЕ ГЕОМЕТРИИ

КАК НАРИСОВАТЬ ПЯТИКОНЕЧНУЮ ЗВЕЗДУ

А. П. Савин



Не правда ли, красива правильная пятиконечная звезда. Ее мы видим на гербе и флаге нашей Родины, она сияет на военных фуражках и на шпильках башен Кремля.

Кто в детстве не пытался нарисовать эту звезду? Наверное, всякий. Но получалось нечто кособокое и неуклюжее, что-нибудь вроде рис. 1.

Первая попытка. В школе мы познакомились с инструментами для геометрических построений — циркулем и линейкой. Попробуем возобновить попытки нарисовать правильную пятиконечную звезду. Сначала спросим себя, что значит правильную? Наверное, нужно, чтобы пять вершин были соединены отрезками равной длины. Линейка поможет нам сделать стороны звезды прямыми, а при помощи циркуля постараемся сделать их равными.

П р и с т у п и м. Строим угол с вершиной A . На его сторонах откладываем равные отрезки AB и AC (рис. 2). Три вершины есть. Осталось найти еще две, и все в порядке. Одна из них (D) должна быть удалена от точки B на такое же расстояние, что и точка A . Значит, она должна лежать на окружности с центром в точке B радиуса AB . Проведем дугу (2) этой окружности. Аналогично проведем дугу (3) окружности такого же радиуса с центром в точке C . На ней должна лежать вторая из оставшихся вершин (E).

Вспомним, что мы хотим получить: расстояние между вершинами D и E должно быть равно расстоянию между остальными вершинами. Поэтому, не изменяя раствора циркуля,



ставим одну из его ножек в какую-нибудь точку D одной дуги (это будет четвертая вершина звезды) и проводим окружность (4), которая пересечется дугой (3) в точке E . Получили пятую вершину. Соединили отрезками полученные точки. И что же? Длины отрезков равны, а звезда явно неправильная.

Вторая попытка. Где же ошибка? Она сразу видна. Стороны у звезды равны, а вот углы при вершинах — нет. Как же сделать, чтобы были равны и все стороны, и все углы?

Нарисуем окружность. Разобьем ее на 5 равных дуг, а затем соединим концы дуг через одну (рис. 3). Нет сомнений, что это и есть нужная нам звезда! Только как разделить окружность на 5 равных частей? С помощью транспортира? Во всей окружности 360° , значит, в каждой части по 72° . Берем транспортир... где же он? Опять куда-то исчез. А может быть, сумеем обойтись и без него?

Приближенный метод. Попробуем на глазок отложить на окружности угол в 72° . Так... 72° — это больше 60° , но меньше 90° . Где-то между ними, чуть ближе к 60° , чем к 90° . Дугу в 60° отложить нетрудно, так как длина хорды, стягивающей ее, равна радиусу окружности. Еще легче построить и дугу в 90° . Отметим концы «нужной» дуги (в 72°) — точки A и B (рис. 4).

Проверим, действительно ли дуга AB равна $1/5$ дуги окружности. Отложим с помощью циркуля дугу BC , равную AB , затем дугу CD , дальше DE , и когда ножку циркуля мы поставим в точку E , то вторая его ножка

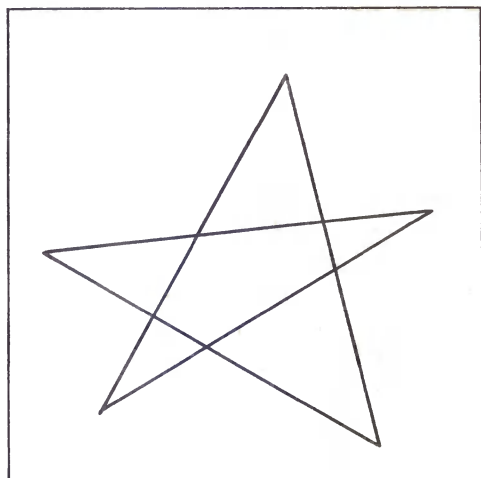


Рис. 1

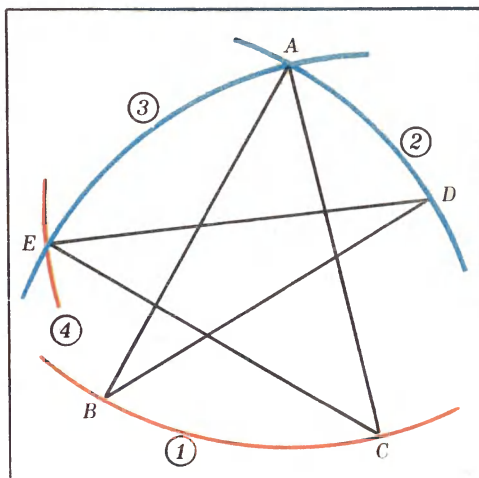


Рис. 2

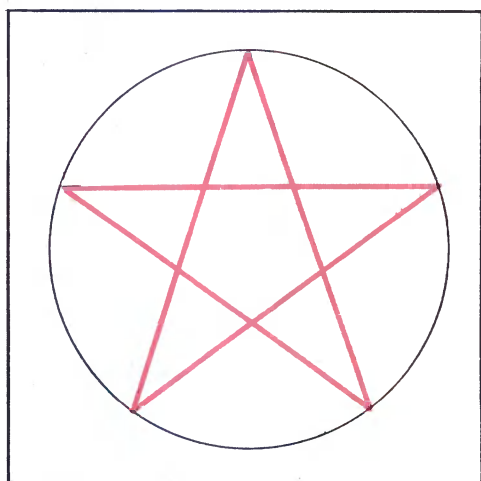


Рис. 3

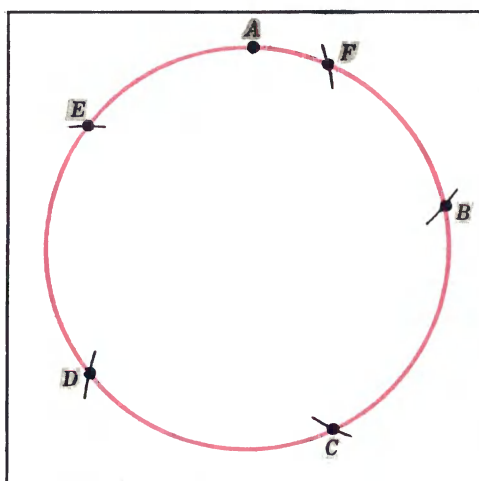


Рис. 4

должна попасть в точку A . Попала? Нет. Значит, мы все делали зря? Нет!

Отметим точку F , в которую попала вторая ножка циркуля. Мы ошиблись на дугу AF , значит, каждый раз мы ошибались на $1/5$ этой дуги, причем, если точка F оказалась правее точки A , то мы выбрали дугу больше, чем нужно, а если левее, то меньше требуемой.

Сделаем поправку. На глазок отложим на дуге AF ее пятую часть — дугу AG (рис. 5). Дуга GB уже гораздо точнее приближается к $1/5$ дуги окружности, чем дуга AB . Теперь сделаем еще раз такую же проверку, что и раньше. Если после пяти откладываний ножка циркуля попадет в черное пятнышко, которым мы отметили точку G , то построение выполнено с нужной точностью. А если нет, то еще раз таким же

способом уточним размер дуги. Двух уточнений практически всегда хватает.

Точное решение. А нельзя ли сразу получить точное решение? Оказывается, можно.

Вот один из «рецептов» такого построения. Пусть BC — диаметр окружности (1), AO — перпендикулярный ему радиус (рис. 6). Проведем окружность (2) радиуса BO с центром B . Через точки пересечения окружностей (1) и (2) проведем прямую и обозначим через D точку ее пересечения с диаметром. Затем с центром в точке D радиусом DA проведем еще одну окружность (3). Точку ее пересечения с диаметром обозначим через E . Проведем окружность (4) радиуса AE с центром A , в пересечении с окружностью (1) получим точки M и M' .

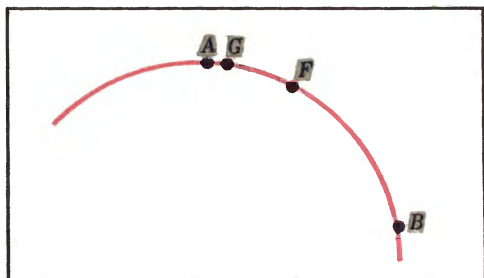


Рис. 5

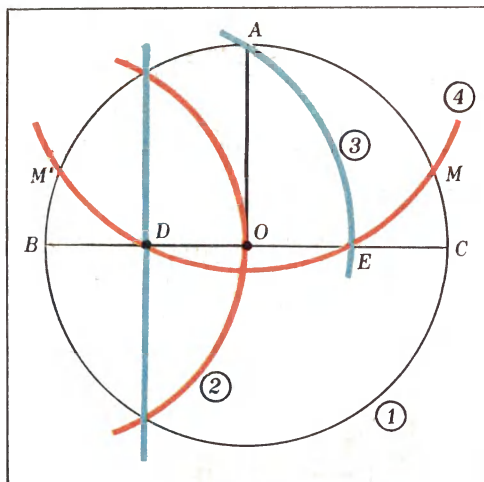


Рис. 6

Дуга AM равна дуге AM' и равна $1/5$ дуги первоначальной окружности.

Чтобы обосновать это, нужны знания математики старших классов школы.

Вы сможете сами придумать обоснованный метод построения, если прочтете статью А. Д. Бендукидзе «Зо-

лотое сечение» (Квант, 1973, № 8). В ней рассказывается о замечательных геометрических свойствах правильной пятиконечной звезды.

Обсудим сказанное. Некоторые читатели возмущенно возропщут: «Зачем же рассказывать о приближенном построении, если есть точное?» А вот зачем.

Во-первых, что значит «точное»? Если его провести идеальными инструментами, то оно будет действительно точное. Но вы же будете чертить реальным карандашом с помощью циркуля и линейки. Заведомо при этом получится неточный результат.

А во-вторых, приближенный метод годится для деления окружности на любое число равных частей, следовательно, достаточно для этого запомнить только *один* метод.

Далее, этот метод проще точного. А простота часто бывает важным аргументом. Так, многие математические вычисления на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) проводятся приближенными методами (хотя существуют и точные) лишь потому, что их использование гораздо проще, а в ряде случаев возможности машины не позволяют воспользоваться точным, но громоздким методом.

И последнее. Оказывается, нет и не может быть точных методов для деления окружности на 7, 9, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25 и еще много других равных частей. Доказательство этого факта принадлежит замечательному немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу.

ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

А. П. Савин

Циркуль и линейка — вот первые чертежные инструменты, которыми пользовался человек. Что может быть проще? Гладкая дощечка — это линейка, а две заостренные палки, связанные на одном конце, — циркуль. Сейчас и циркуль, и линейка стали изящнее, но назначение у них осталось прежним: по линейке проводят прямые (точнее, отрезки прямых), а циркулем рисуют окружности.

В школе изучают ряд простейших построений циркулем и линейкой. Строят прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную (или параллельную) данной прямой, делят отрезок на несколько равных частей, делят пополам заданный угол.

А вот пример более сложной задачи: построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины.

Решение задачи возможно, как нетрудно убедиться, лишь в том случае, когда длины высоты h , биссектрисы b и медианы m удовлетворяют соотношению $h \leq b \leq m$; в противном случае искомого треугольника не существует.

Проведем на плоскости произвольную прямую l и восставим из некоторой ее точки N перпендикуляр к этой прямой. Отложим на нем отрезок AN длины h . Точка A будет одной из вершин искомого треугольника, а прямая l будет содержать его основание. Отметим точки K и M пересечения прямой l с окружностями радиусов b и m с центром в точке A (рис. 1) и соединим их с точкой A . Это будут биссектриса и медиана нашего треугольника. Заметим, что биссектриса

будет лежать между медианой и высотой.

Дальнейшее построение основано на довольно простом, но редко отмечаемом факте: *биссектриса угла треугольника и срединный перпендикуляр к стороне, противолежащей этому углу, пересекаются на окружности, описанной вокруг треугольника* (эти биссектриса и перпендикуляр делят пополам дугу описанной окружности, опирающуюся на указанную сторону и не содержащую вершины A , см. рис. 2).

Закончить построение теперь уже просто. Проводим через точку M перпендикуляр к прямой l и продолжаем биссектрису AK до пересечения с ним в точке D (рис. 3). Итак, точки A и D лежат на окружности, описанной вокруг искомого треугольника, а ее центр O , очевидно, находится на прямой MD — срединном перпендикуляре к одной из ее хорд и на срединном перпендикуляре к отрезку AD , который также является одной из ее хорд. Построив точку O как точку пересечения указанных прямых, можно провести окружность, описанную вокруг искомого треугольника, поскольку мы знаем ее центр O и радиус $|OA|$. Точки B и C пересечения окружности с прямой l дадут недостающие вершины B и C искомого треугольника.

Искусство точного построения геометрических фигур при помощи циркуля и линейки было развито в Древней Греции. Одной из труднейших задач на построение, которые тогда умели выполнять, является задача построения окружности, касающейся трех данных окружностей. Эта задача носит название *задачи Аполлония*, по имени выдающегося греческого геометра Аполлония из Перги (около 260—170 гг. до н. э.).

Однако древнегреческим геометрам никак не удавалось выполнить некоторые построения, используя лишь циркуль и линейку, а построения, выполненные с помощью других инструментов, не считались геометрическими. К числу таких построений относятся построение квадрата, равновеликого данному кругу («квadrатура круга»), деление произвольного угла на три равные части («трисекция угла») и построение стороны куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба («удвоение куба»).

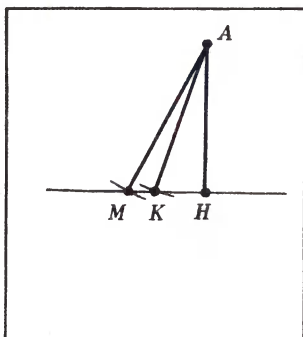


Рис. 1

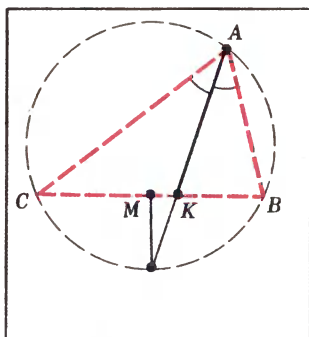


Рис. 2

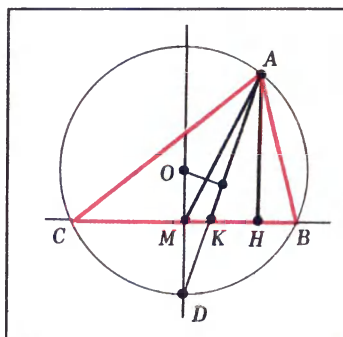


Рис. 3

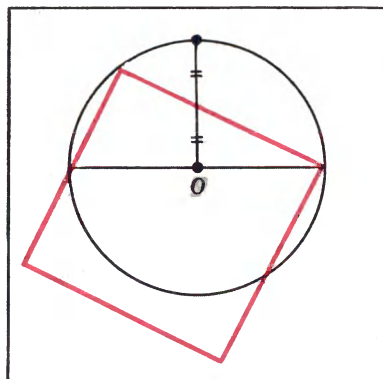


Рис. 4

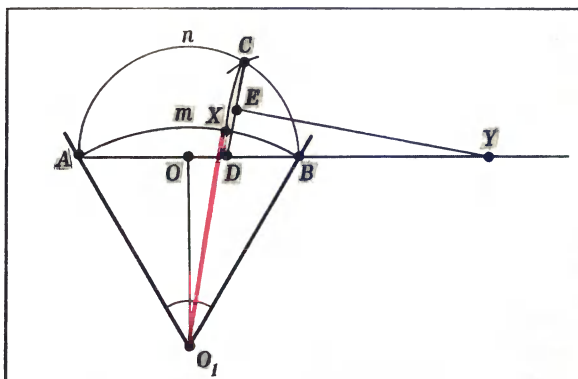


Рис. 5

Эти три знаменитые задачи привлекали внимание выдающихся математиков на протяжении столетий, но окончательное решение получили лишь в середине прошлого века, когда была доказана их неразрешимость, то есть невозможность указанных построений лишь с помощью циркуля и линейки. Эти результаты были получены средствами не геометрии, а алгебры, что еще раз подчеркнуло единство математики.

Еще одной интереснейшей задачей на построение с помощью циркуля и линейки является задача построения правильного многоугольника с заданным числом сторон. Древние греки умели строить правильный треугольник, квадрат, правильные пятиугольник и пятнадцатигульник, а также все многоугольники, которые получаются из них удвоением числа сторон, — и только их.

Новый шаг в этой области был сделан лишь в 1801 г. великим немецким математиком К. Ф. Гауссом. Он указал способ построения циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника и все значения n , при которых построение правильного n -угольника возможно указанными

средствами. Этими многоугольниками оказались лишь те многоугольники у которых количество сторон является *простым числом Ферма* *) или произведениями нескольких различных простых чисел Ферма, а также те, которые получаются из них удвоением числа сторон. Таким образом, была доказана невозможность построения с помощью циркуля и линейки правильных семиугольника, девятиугольника, одиннадцатигульника, тринадцатигульника.

Теория построений с помощью циркуля и линейки получила широкое развитие в конце XIX века. Например, было показано, что любое построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью лишь одной линейки, если в плоскости построения задана некоторая окружность и указан ее центр.

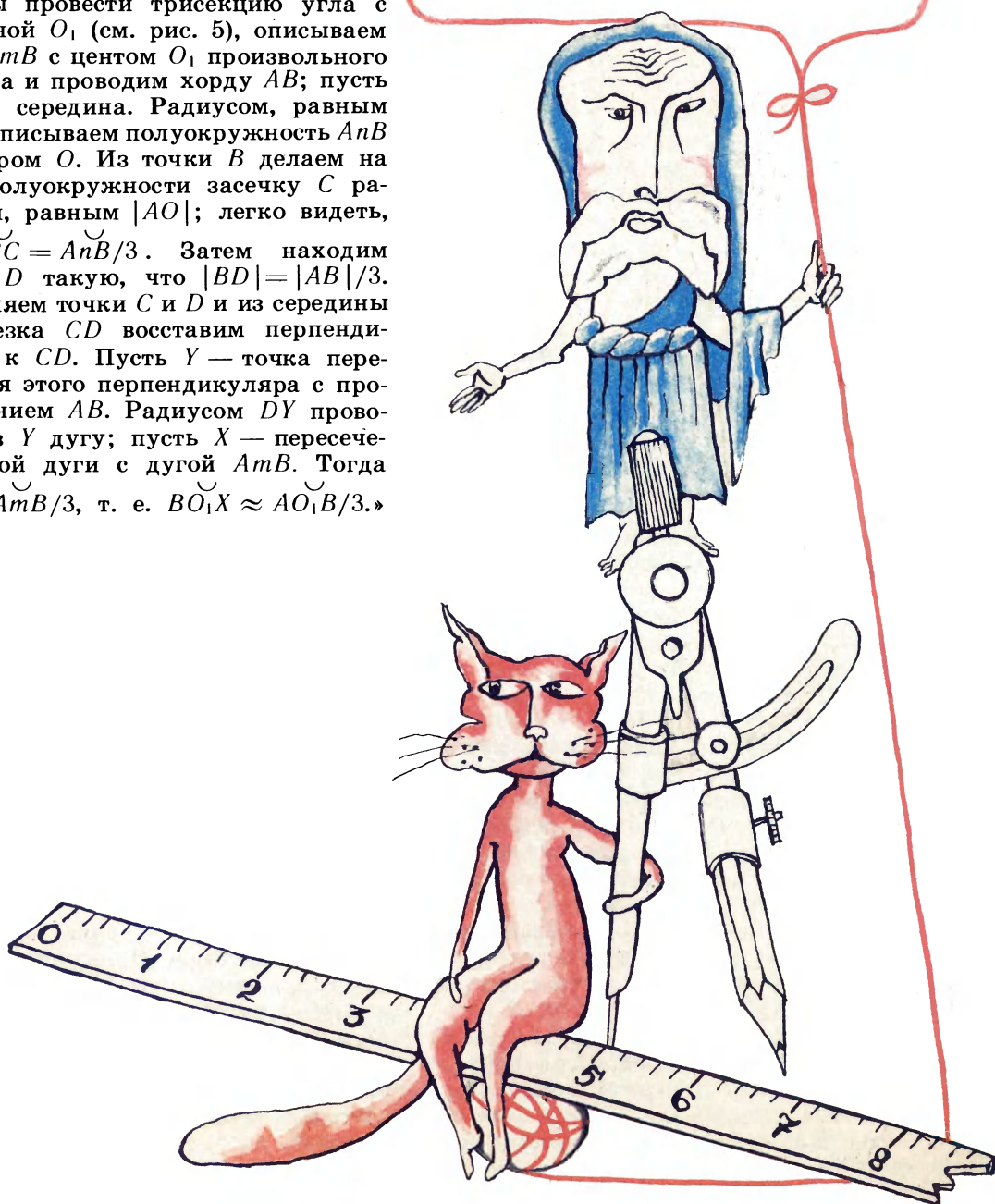
Все эти исследования внесли огромный вклад в развитие математики. Однако в практических построениях никто не ограничивает нас в наборе инструментов. Для большинства построений вполне достаточно линейки с делениями и транспортира.

*) См., Квант, 1979, № 12.

Довольно любопытны некоторые приближенные способы построений. Например, приближенная квадратура круга получается, если за сторону квадрата взять хорду, проходящую через конец одного из диаметров круга и середину перпендикулярного ему радиуса (рис. 4). Этому построению соответствует значение $\pi = 3,2$.

Способ приближенной трисекции угла при помощи циркуля и линейки предложил читатель журнала «Квант» А. Падалко. Вот его метод: «Чтобы провести трисекцию угла с вершиной O_1 (см. рис. 5), описываем дугу AmB с центром O_1 произвольного радиуса и проводим хорду AB ; пусть O — ее середина. Радиусом, равным $|AO|$, описываем полуокружность AnB с центром O . Из точки B делаем на этой полуокружности засечку C радиусом, равным $|AO|$; легко видеть, что $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AnB}/3$. Затем находим точку D такую, что $|BD| = |AB|/3$. Соединяем точки C и D и из середины E отрезка CD восставим перпендикуляр к CD . Пусть Y — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением AB . Радиусом DY проводим из Y дугу; пусть X — пересечение этой дуги с дугой AmB . Тогда $\overset{\frown}{BX} \approx \overset{\frown}{AmB}/3$, т. е. $\overset{\frown}{BO_1X} \approx \overset{\frown}{AO_1B}/3$.»

Оценку точности этого построения мы поручили ЭВМ. Машина выдала следующий результат: точность построения не менее $0,1^\circ$, наихудший результат — при угле 78° , относительная погрешность, то есть отношение величины отклонения к величине самого угла, не превосходит $0,01$ и максимальная при угле около 158° .



КООРДИНАТЫ

А. П. Савин

Каждому из вас приходилось обращаться к прохожим с просьбой объяснить, где находится то или иное здание или учреждение. Отвечающих можно разделить на три категории. Первые машут рукой в некотором направлении и говорят «там», иногда добавляя «минутой в двадцати ходьбы». Вторые говорят приблизительно так: «Пройдите булочную, там будет поворот налево, но вы туда не поворачивайте, а идите прямо мимо кафе, а когда пройдете книжный магазин, поверните налево, идите мимо школы, потом будет желтый двухэтажный дом с колоннами, вот напротив него и будет ваше учреждение.» Третьи отвечают так: «Идите прямо до улицы Чернышевского, поверните по ней налево, и второй дом от перекрестка с улицей Добролюбова на правой стороне — тот, который вы ищите.»

И вот, следуя совету, вы двигаетесь в указанном направлении. Если возникает сомнение в правильности выбранного пути, вновь обращаетесь к прохожим и в конце концов находите нужный вам дом. Как говорят, «язык до Киева доведет».

А что делать мореплавателям? У кого им спросить дорогу в открытом море? Как объяснить другим, где находится открытый ими остров?

И вот за 200 лет до н. э. греческий ученый Гиппарх предложил хорошо вам известные географические координаты: *широту* и *долготу*. С помощью этих двух чисел можно точно определить положение острова, поселка, горы или колодца в пустыне и нанести их на карту или глобус. На-

учившись определять в открытом море широту и долготу местонахождения корабля, моряки получили возможность, никого не спрашивая, выбирать нужное им направление.

Напомним, что восточную долготу и северную широту обозначают числами со знаком «плюс», а западную долготу и южную широту — со знаком «минус». Таким образом, пара чисел со знаками однозначно определяют точку на земном шаре. Например, пара $+70^\circ$, $+60^\circ$ определяет точку в центре острова Вайгач, расположенного в Карском море.

У знаменитого писателя-фантаста Жюль Верна некоторые романы прямо построены на ситуациях, связанных с географическими координатами. Так, например, в романе «Удивительные приключения дядюшки Антифера» одному из героев известна широта острова, на котором спрятались сокровища, а другому — долгота этого острова. А вспомните текст записки из романа «Дети Капитана Гранта»:

«7 июня 1862 года трехмачтовое судно «Британия» Глазго потерпело крушение ... гони... южн... берег ... два матроса... Капитан Гр... дости... контин... пл... жесток... инд... брошен этот документ ... долготы и $37^\circ 11'$ широты ... окажите им помощь ... погибнут.»

Сколько трудностей пришлось испытать героям романа, пока они нашли Капитана Гранта, и все из-за того, что оказалось невозможным восстановить долготу.

В XIV веке французский математик Н. Орсем ввел, по аналогии с географическими, координаты на плоскости. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы теперь называем *абсциссой* и *ординатой*.

Это нововведение оказалось чрезвычайно удачным. На его основе возник метод координат, связавший геометрию с алгеброй. Основная заслуга в создании этого метода принадлежит великому французскому математику Рене Декарту. В его честь такая система координат называется *декартовой*. На этой системе основаны многие способы указания места. Например, на билете в кинотеатр стоят два числа: ряд и место — их можно рас-



сма́тривать как координаты вашего места в зале. Подобные же координаты приняты в шахматах, правда, вместо одного из чисел берется буква: вертикальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавита, а горизонтальные — цифрами.

Таким образом, каждой клетке шахматной доски ставится в соответствие пара из буквы и числа, и шахматисты получают возможность записывать свои партии.

Тот же «шахматный» принцип применяется сейчас на планах городов. План города разбивают на квадраты, занумерованные с помощью букв и цифр, а на оборотной стороне перечисляются все изображенные улицы в алфавитном порядке и указывают, в каком квадрате они находятся.

Существуют на плоскости и другие системы координат. Вспомним прохожего, который показывал направление рукой и говорил, сколько времени нужно идти. На таком прин-

ципе основана *полярная система координат*. Для ее введения выбирают начальную точку, называемую *полюсом* (поэтому система и называется «полярной»); из этой точки проводят луч — *полярную ось*. Чтобы определить координаты точки на плоскости, ее соединяют отрезком с полюсом и вычисляют длину этого отрезка и угол между ним и полярной осью.

Иногда координаты выступают в завуалированном виде. Например, в здании Московского университета на Ленинских горах аудитории нумеруются так, что по номеру можно узнать этаж, на котором она находится. Для этого номер нужно разбить на две части: число сотен и остальную часть. Число сотен и есть этаж. Например, аудитория 1503 находится на 15-м этаже, а 817 — на 8-м.

До сих пор мы говорили о координатах на сфере или на плоскости, задающихся двумя числами. Существуют также координаты, задаваемые одним числом. Это координаты на прямой. Я думаю, каждый из вас знает, что достаточно задать одно число — расстояние от точки до начала отсчета, чтобы указать на прямой положение этой точки. В жизни мы очень часто сталкиваемся с такими координатами. Пример — железная дорога с километровыми столбами вдоль нее. Другой пример — номера домов на улице. А время? Хотя каж-

дый момент времени мы обозначаем целым ворохом чисел: годом, месяцем, днем, часом, минутой и секундой, ясно, что можно обойтись одним числом, выраженным, например, в секундах. Одним числом задается положение точки на окружности.

Ну, а сколько координат зададут положение точки в пространстве? Естественно, три. Эти три числа можно получить, например, так. Соединим лучом центр Земли и нашу точку и рассмотрим широту и долготу пересечения луча с Землей и расстояние от нашей точки до центра Земли. Такая система координат называется *сферической*. Можно поступить по-другому. Выберем некоторую плоскость и введем на ней декартову систему координат, а нашей точке сопоставим координаты ее проекции на эту плоскость и расстояние от нее до плоскости, взятое со знаком плюс для одной половины пространства и со знаком минус — для другой; так мы получим декартову систему координат в пространстве.

Сферической системой координат обычно пользуются на аэродроме. Рядом с аэродромом ставят радиолокатор. Этот прибор умеет определять дальность до самолета, угол, под которым самолет виден над горизонтом,

и угол между направлением на самолет и направлением на север.

В заключение обсудим одно деловое предложение. Каждую точку в пространстве можно задать тремя числами. Тем более можно задать тремя числами положение вашей квартиры. Так зачем же писать на конвертах длинные адреса? Достаточно было бы договориться о системе координат (например, долготе, широте и номере этажа) и письма приходили бы к адресату.

Вот тут-то пришла пора вспомнить письмо Капитана Гранта. Ведь если вы ошибетесь в одной из цифр такого короткого адреса или эту цифру нельзя прочесть (мало ли что случится в дальней дороге), письмо до адресата не дойдет. Обычный адрес более устойчив. Если вы ошибетесь в нем не слишком сильно, письмо все равно дойдет до места. В почтовом адресе содержится, как говорят, *избыточная информация*. Избыточную информацию включил в свое письмо и Капитан Грант. Он написал свое письмо на трех языках и сообщил не только координаты места крушения, но и материк, вблизи которого оно произошло. Но и этого оказалось недостаточно. Так что переходить на упрощенный адрес, пожалуй, не стоит.



КОЕ-ЧТО О ВЫПУКЛОСТИ

А. П. Савин



Изучая геометрию в школе, вы встречаетесь с разными плоскими и пространственными фигурами. Так, вы уже знаете, что такое треугольник, квадрат, окружность, куб, пирамида, шар, конус, цилиндр. Конечно, этот перечень далеко не исчерпывает всего разнообразия форм, существующих в природе. Огромное количество замысловатых и причудливых форм способно создать и человеческое воображение. Естественно, что лишь немногие из этих форм имеют названия. Да и нужно ли все их называть?

Когда садовод сокрушается: «Проклятые птицы склевали у меня все вишни!» — ему безразлично, какие именно птицы это сделали — воробы, дрозды или попугаи. Он говорит о существах, которые летают, садятся на ветки деревьев и не прочь полакомиться сочными вишнями. Знаете ли вы, что существует 8616 различных видов птиц? Можно ли запомнить все их названия? Конечно, нет. Зоологи разделяют всех птиц на 40 отрядов: голуби, чайки, воробьиные и т. д., объединяя в один отряд птиц, обладающих похожими свойствами. И если вы будете знать эти сорок отрядов, а также два-три десятка названий птиц, обитающих в вашей местности, то знакомство с птицами можно уже считать состоявшимся.

Так и в геометрии: вы знакомитесь с наиболее часто встречающимися фигурами. А можно ли выделить какие-нибудь интересные совокупности — «отряды» фигур? Да, и это одна из целей геометрии. Свойство, которое объединяет фигуры в тот «от-

ряд», о котором мы хотим рассказать, называется *выпуклостью*.

Слово «выпуклый» не является для нас новым. Однако попробуйте дать этому понятию четкое определение и вы увидите, что это сделать не так уж просто. Посмотрим, как это понятие определяется в «Словаре русского языка» С. И. Ожегова. Читаем: «*Выпуклый — имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу*». А что значит дугообразную? Читаем: «*Дугообразный — имеющий форму дуги*». Что же такое дуга? — «*Дуга — часть окружности, круга или другой кривой линии*». Тут уже наше терпение лопается: во-первых, кривые линии могут быть самыми разнообразными, а во-вторых, круг — не линия. Исходя из этого определения выпуклости, можно ли что-нибудь утверждать о выпуклости (или невыпуклости), например, куба? По-моему, нельзя. Так что такое «определение» никак не может устроить математика.

В математике понятие выпуклый имеет четко определенный смысл. *Множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками A , B этому множеству принадлежит и весь отрезок AB* .

Теперь довольно очевидно, что куб — выпуклое тело. А вот фигура на рис. 1 не выпукла. Нетрудно понять, что любой треугольник является выпуклой фигурой. А четырехугольники могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис. 2).

Ну, а можно ли про выпуклые множества что-нибудь доказать? Можно. Например, докажите (это совсем просто), что пересечение двух или нескольких выпуклых множеств снова является выпуклым множеством (пустое множество также будем считать выпуклым). Более трудно доказать такое утверждение: *через любую точку границы выпуклой фигуры на плоскости можно провести прямую так, чтобы вся фигура лежала по одну сторону от этой прямой*. Такая прямая изображена на рис. 3; она называется *опорной прямой*. Если граничная точка является «угловой», как на рис. 4, через нее можно провести несколько опорных прямых. Докажите самостоятельно, что если некоторая плоская фигура имеет опорную прямую в каждой граничной точке, то эта фигура является выпук-

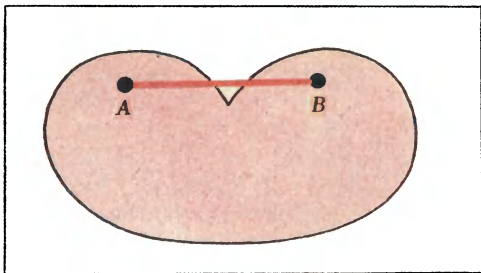


Рис. 1

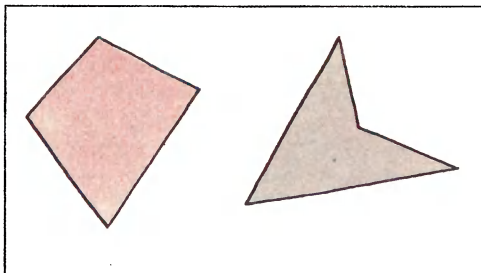


Рис. 2

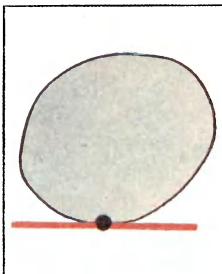


Рис. 3

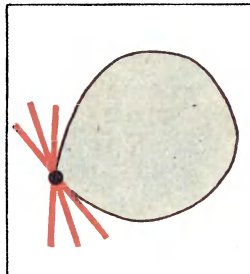


Рис. 4

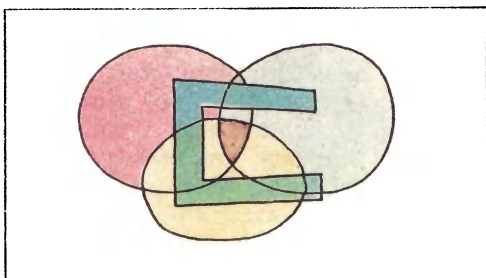


Рис. 5

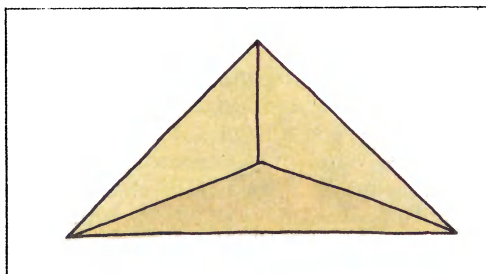


Рис. 6

лой. Таким образом, сформулированное утверждение можно принять за определение выпуклой фигуры.

Думаю, что наличие опорных прямых у плоских выпуклых фигур (аналогично — опорных плоскостей у выпуклых тел), хотя и является очень важным свойством, вряд ли кого удивит: оно довольно очевидно. Следующий факт гораздо более удивителен.

Теорема. *Если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим фигурам.*

Требование выпуклости существенно. Действительно, взгляните на рис. 5; из четырех фигур, изображенных на нем, невыпукла лишь одна; однако, хотя у любых трех фигур есть общая точка, точки, принадлежащей одновременно всем четырем фигурам, нет.

А если на плоскости задано несколько выпуклых фигур таких, что любые две из них имеют общую точку? Обязательно ли найдется точка, общая для всех фигур? Покажите самостоятельно, что такой точки может и не быть.

Вы обратили внимание, что мы все время подчеркивали то, что рассматриваемые фигуры — плоские? И это неспроста, потому что существуют четыре выпуклых тела в пространстве, каждые три из которых имеют общую точку, но нет точки, общей для всех четырех тел, например, четыре грани треугольной пирамиды, изображенной на рис. 6. Значит, в пространстве подобная теорема уже не имеет места? Оказывается, чтобы она осталась верной и в пространстве, ее достаточно лишь немного «подправить». А именно:

Теорема. *Если в пространстве задано несколько выпуклых тел, каждые четыре из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим телам.*

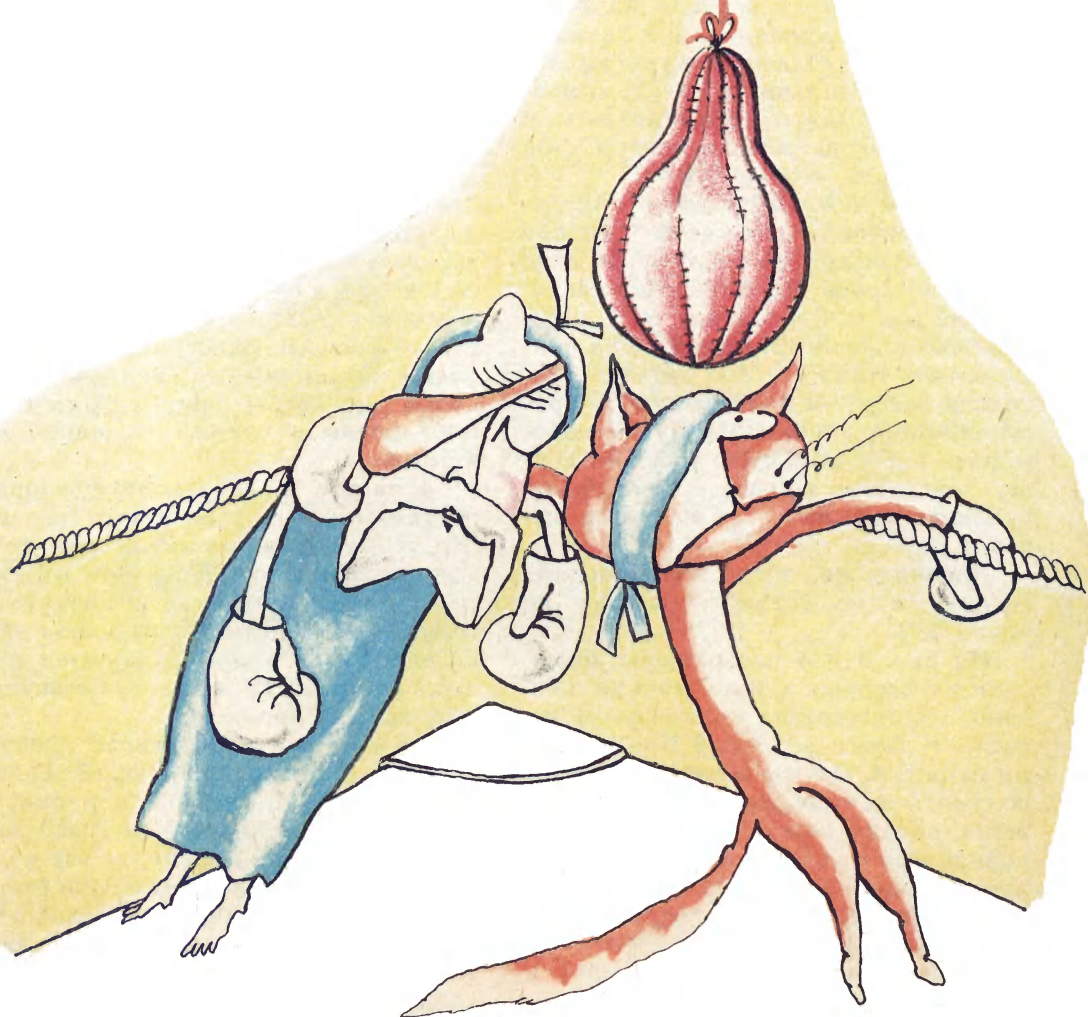
Теорема, о которой мы только что рассказали, была открыта не так давно — в начале 20-х годов нашего столетия австрийским математиком Э. Хелли и носит его имя (Хелли сформулировал ее для выпуклых тел, расположенных в n -мерном пространстве). Теорему Хелли можно рассмот-

реть и для выпуклых множеств, лежащих на прямой (на прямой выпуклыми множествами являются отдельные отрезки, лучи, а также вся прямая и пустое множество). На прямой теорема Хелли звучит так:

Теорема". Если на прямой задано несколько выпуклых множеств, каждые два из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим множествам.

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

Если вас заинтересовали выпуклые фигуры, прочтите книгу И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, которая так и называется: «Выпуклые фигуры».



ОЛИМПИЙСКИЕ КОЛЬЦА

А. П. Савин

1980 год — год проведения XXII Олимпийских игр в Москве. Неудивительно, что не только москвичи, но и жители всех городов и сел нашей страны часто видели тогда на страницах газет и журналов, на плакатах и сувенирах Олимпийскую эмблему — пять сцепленных колец, символизирующих пять объединенных в олимпийское движение континентов земного шара.

Давайте повнимательнее приглядимся к этой лаконичной эмблеме (рис. 1): три кольца сверху, два снизу — вот, вроде бы, и все. Но взгляните на рис. 2. Здесь вновь пять сцепленных колец — три сверху, два снизу, но что-то не то. Что именно? Эти кольца *сцеплены более сложно* — рисунок, который они образуют, напоминает часть кольчуги древнего воина, тогда как кольца Олимпийской эмблемы сцеплены в обычную цепочку.

Конечно же, пять колец можно сцепить и не только так, как на рис. 1 и 2.

На рис. 3 и 4 изображены *зацепления*, в которых каждое кольцо сцеплено с одинаковым количеством колец — с двумя на рис. 3 и с четырьмя на рис. 4. Первое зацепление легко получить из колец Олимпийской эмблемы, сцепив между собой концевые кольца цепочки, а второе можно получить, сцепив сначала два кольца, затем с каждым из них — третье, потом с каждым из трех — четвертое и, наконец, с каждым из четырех — пятое кольцо.

А можно ли так сцепить пять колец, чтобы каждое было сцеплено

ровно с тремя другими? Попробуйте, однако должен вас предупредить, что все ваши попытки окажутся безуспешными. Почему? А вот почему.

Предположим, что такое сцепление удалось осуществить. Привяжем к какому-нибудь кольцу ярлычок с номером 1; это кольцо у нас сцеплено еще с тремя кольцами и не сцеплено ровно с одним. Давайте к этому кольцу привяжем ярлычок с номером 2. В свою очередь кольцо с номером 2 должно быть сцеплено со всеми остальными кольцами, кроме кольца с номером 1. Возьмем какое-нибудь из еще не пронумерованных колец и прицепим к нему ярлычок с номером 3 — оно, как мы знаем, сцеплено с кольцами № 1 и № 2, поэтому должно быть сцеплено с одним из еще не пронумерованных колец (которому мы дадим номер 4) и не сцеплено с последним кольцом (ему мы дадим номер 5). Посмотрим на кольца № 4 и № 5. Если они сцеплены, то тогда кольцо № 4 сцеплено со всеми четырьмя оставшимися кольцами, а мы предположили, что каждое кольцо сцеплено ровно с тремя другими. Значит, кольца № 4 и № 5 не сцеплены, но в таком случае кольцо № 5 будет не сцеплено с двумя кольцами: № 3 и № 4, а сцеплено только с двумя, что опять противоречит предположению. Таким образом, наше предположение о возможности сцепления пяти колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя, оказалось неверным.

А на рис. 5 изображено совершенно удивительное зацепление трех колец. Никакие два из них не сцеплены между собой, но попробуйте их расцепить — у вас ничего не получится. Однако если разрезать любое из этих колец, то все кольца окажутся расцепленными. Эти кольца называются *кольцами Борромео*.

Ну, а можно ли подобный «фокус» устроить с пятью кольцами? Взглянув на рис. 6, вы увидите пример такого зацепления. Если разрезать среднее (зеленое) кольцо, то все кольца можно будет разнять, а если разрезать какое-нибудь другое кольцо, то можно будет снять его и еще одно кольцо, а остальные три образуют кольца Борромео. Конечно же, у вас уже возник вопрос: «А можно ли так сцепить пять колец, чтобы ника-

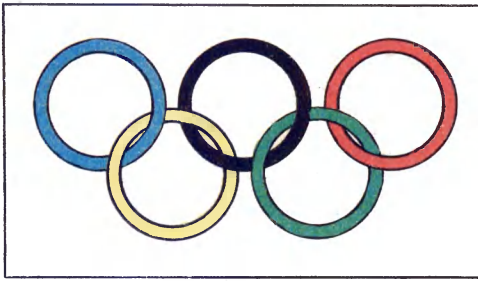


Рис. 1

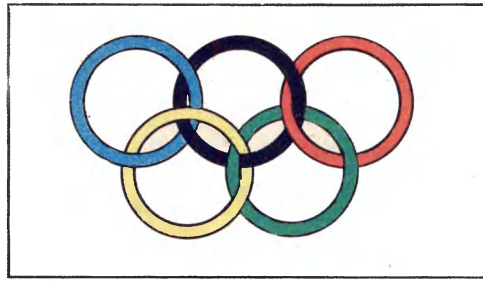


Рис. 2

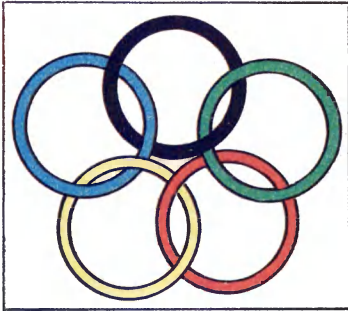


Рис. 3

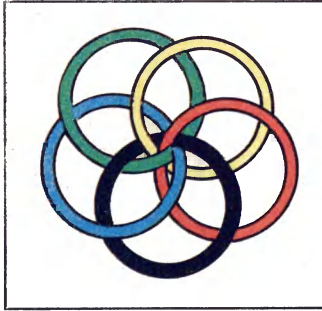


Рис. 4

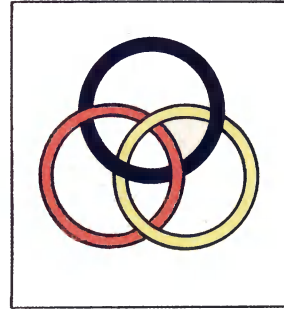


Рис. 5

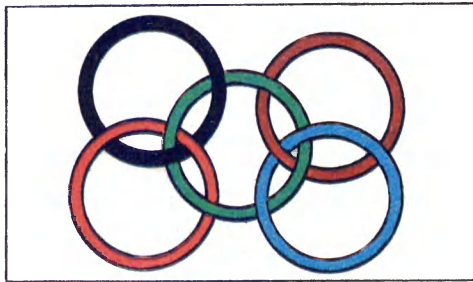


Рис. 6

кольца не сцеплены между собой и что, разорвав любое кольцо, можно разъединить все кольца. Более того, такой процесс можно совершить с любым количеством колец, большим двух.

К сожалению, мне не удалось расположить эту конструкцию на столе в виде розетки (как сцепления колец на предыдущих рисунках). Попробуйте сделать это сами.

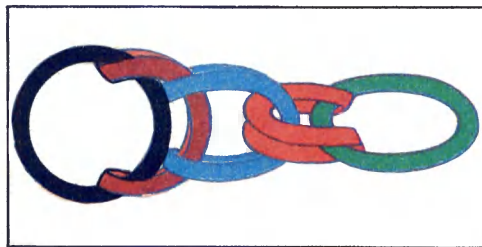


Рис. 7

кие два не были сцеплены и при разрезании любого кольца все кольца можно было бы разнять?» Оказывается, и это возможно. Посмотрите на рис. 7. На нем хорошо виден процесс такого сцепления; кроме того, на нем прекрасно видно, что никакие два



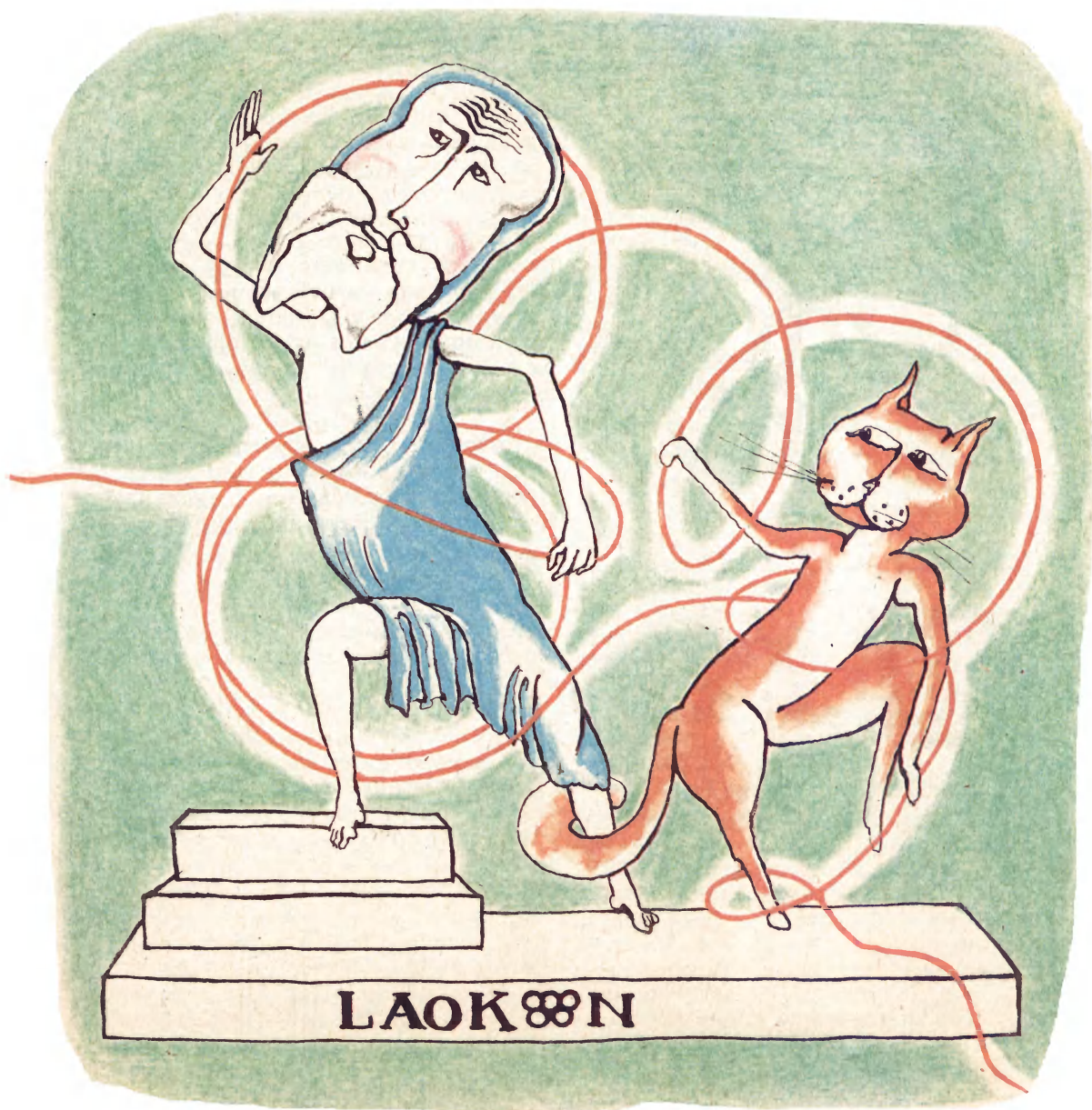
У п р а ж н е н и я

1. Имеется 6 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено: а) с двумя другими кольцами; б) с тремя другими кольцами; в) с четырьмя другими кольцами; г) с пятью другими кольцами.

2. Имеется 7 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено: а) с двумя

другими кольцами; б) с четырьмя другими кольцами; в) с шестью другими кольцами, и невозможно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено: г) с тремя другими кольцами; д) с пятью другими кольцами.

3. Докажите, что n колец можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими кольцами, в том и только в том случае, если хотя бы одно из чисел n и k является четным.



ЭТА УДИВИТЕЛЬНАЯ ВЯЗЬ КОЛЕЦ

А. Т. Калинин

В рассказе «Олимпийские кольца» уже говорилось о кольцах Борромео. Это три кольца, переплетенные между собой так, что их не расцепишь, хотя любые два из них не зацеплены. Но стоит разрезать любое кольцо, и вся связка рассыпается.

Известные издавна — когда-то они так поразили воображение основателей древних родов Нормандии, Бургундии и Ломбардии, что те помещали эти кольца в свои гербы. По древнему итальянскому роду Борромео — патрициев из города Милана, чьи воины носили на одежде нашивки из трех переплетенных колец, эти кольца и стали называть кольцами Борромео.

Кольца Борромео украшают и надгробье великого Микеланджело. На высоком мраморном памятник вырезан барельеф: три венка, лавровый, оливковый и дубовый, переплетаясь между собой, как кольца Борромео, символизируют три взаимосвязанных вида искусства, в которых прославился Микеланджело Буонарроти, — скульптуру, живопись и архитектуру. Такое же переплетение венков показано и на медали, отчеканенной в честь этого великого художника эпохи Возрождения (рис. 1).

Но нас интересует не эстетическая или символическая сторона дела, а математическая. Почему кольца Борромео не расцепляются? Можно ли аналогично зацепить большее число колец? Имеются ли у таких колец полезные применения?

Ответить на эти вопросы нам помогут

Изготовим кольца Борромео из гибкой проволоки (или шнура). Выбрав любые два кольца, например, красное и синее (рис. 2), разведем их друг от друга. При этом среднее (желтое) кольцо изогнется, образуя нечто вроде двойной скобы. Эта скоба вставлена в синее кольцо, а красное — одето на скобу и служит замком. Оно не позволяет вынуть скобу из синего кольца. Но разорвешь любое кольцо — все развалится!

Будем говорить, что совокупность колец образует *тривиальное зацепление*, если они на самом деле не зацеплены, то есть их можно отделить друг от друга (разрешается их гнуть и как угодно двигать, но рвать нельзя). В противном случае мы скажем, что кольца образуют *нетривиальное*



Рис. 1

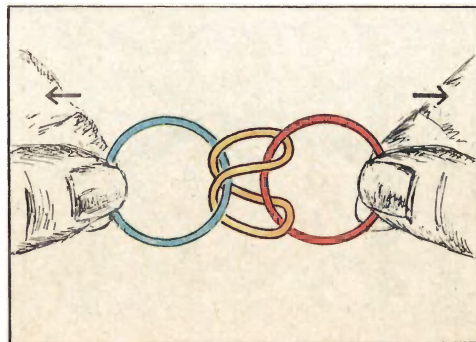


Рис. 2

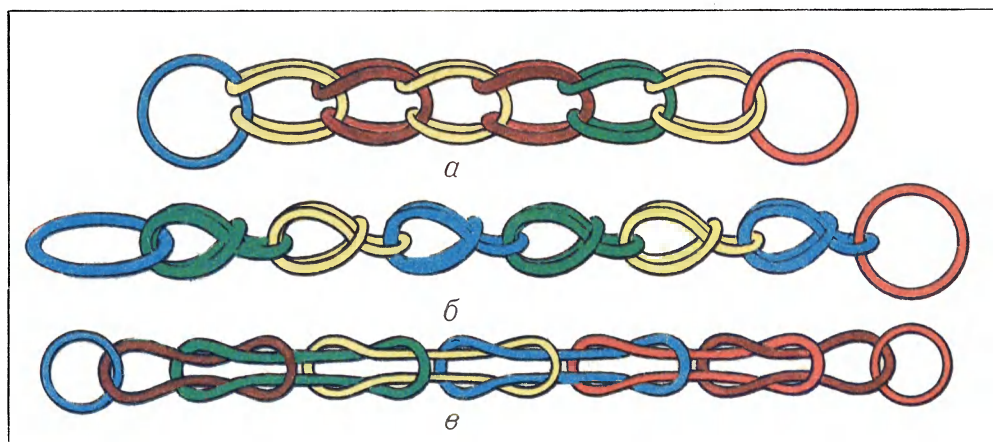


Рис. 3



Фото 1



Фото 2

зацепление или что они зацеплены. На языке этих терминов мы можем о кольцах Борромео сказать, что, во-первых, они зацеплены и, во-вторых, удаление любого кольца приводит к тривиальному зацеплению всех колец.

Оказывается, что можно переплести любое число колец, обладающих тем же свойством, если расположить кольца в виде

Цепочки

Цепочка на рис. 3, а — наиболее естественное и давно известное зацепление, но возможны и другие варианты, обладающие точно такими же свойствами (рис. 3, б, в). Подобные цепи обладают важным практическим преимуществом — их можно собирать из готовых целых звеньев. У обычной цепи приходится сваривать каждое звено, предварительно сцепив его с соседним. Недаром цепи из колец Борромео издавна применяются для украшений (фото 1) и в быту (фото 2).

Цепочки полезны, конечно, но менее красивы, чем кольца Борромео. Однако, если звенья цепочки попробовать расправить и растянуть так, чтобы они снова стали плоскими, то цепочки разворачиваются в красивые

Розетки

На рис. 4, а, б изображены розетки, полученные соответственно из 5-звенной и 12-звенной цепочки типа той, что на рис. 3, а. «Коврик», получившийся на рис. 4, б, сплетен не из од-

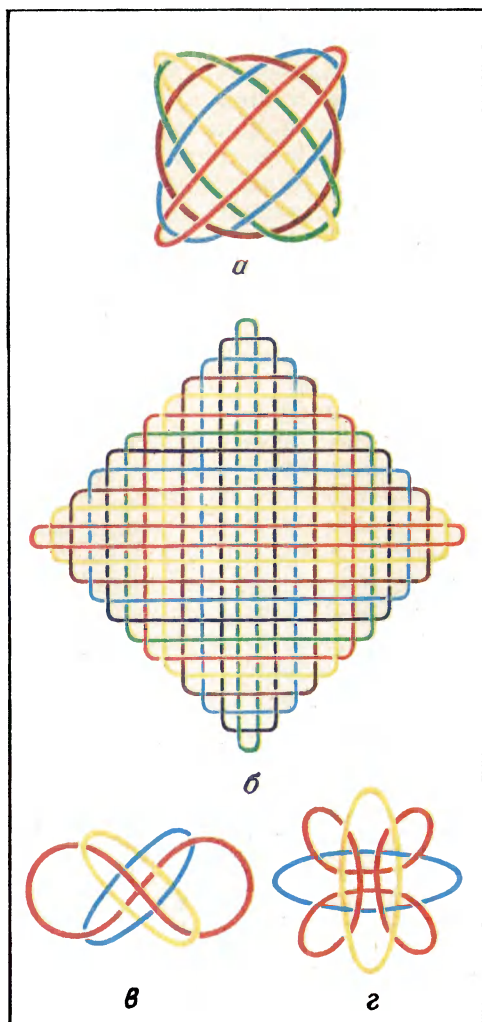


Рис. 4

ной или двух нитей, а из 12 довольно больших колец: удаление любого из них приводит к тривиальному зацеплению — весь «коврик» рассыпается. Из рисунка видно, что количество колец, из которых состоит «коврик», может быть сколь угодно большим, и тем не менее достаточно разорвать одно (притом любое!) кольцо, чтобы «коврик» распался на отдельные кольца.

Концы цепочек Борромео можно соединить, замкнув цепь. Замкнуть можно и цепочку, состоящую всего из трех колец. Расправив затем получившееся переплетение, получим розетки, показанные на рис. 4, в, г. Это новые варианты переплетения трех колец, сохранившие все свойства колец Борромео.

Построения типа колец Борромео можно использовать и для изготовления

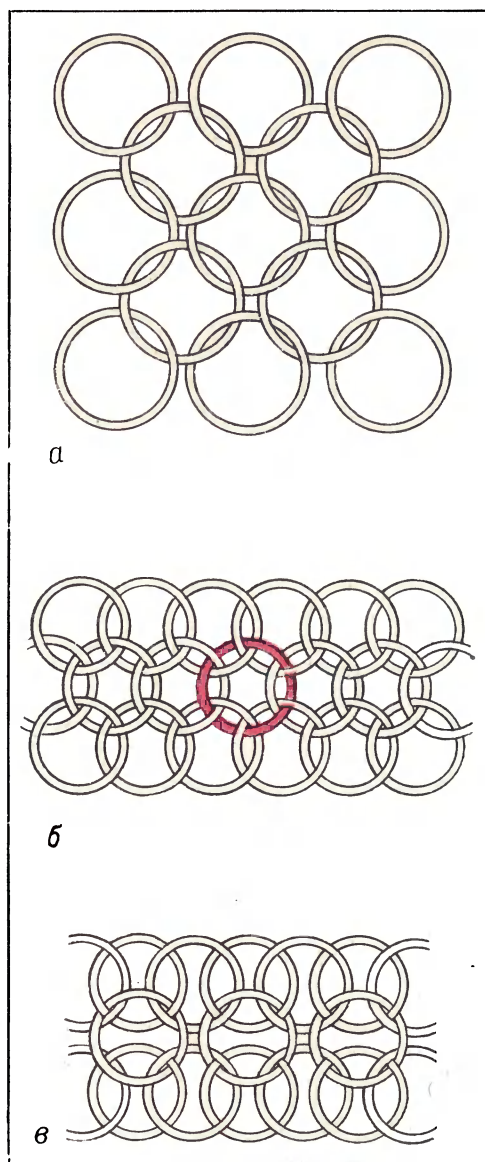


Рис. 5

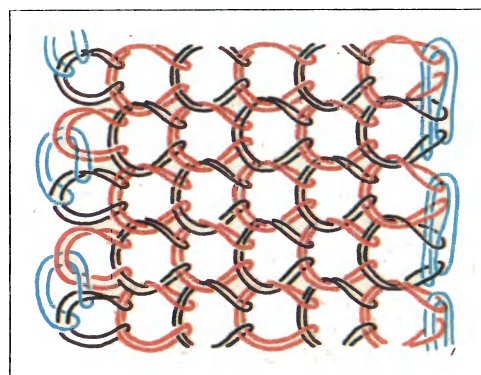


Рис. 6

Кольчуги

Здесь уже нужны маленькие, жесткие колечки; переплестать их можно по-разному (см., например, рис. 5,б,в). Возможны и другие интересные варианты.

Заметим, что, хотя построение на рис. 5,а основано на повторении рисунка колец Борромео, удаление одного колечка не приводит к полному распадению кольчуги. Например, при удалении красного кольца кольчуга (рис. 5,а) распадается на два куска; впрочем, если бы в кольчуге было больше трех рядов, удаление одного колечка привело бы лишь к небольшой дырке.

Иначе ведет себя вязь колец (рис. 6), составленная из «двойных скобок» — при удалении любой из них она полностью рассыпается! Кольчуги (рис. 5) можно собирать только из разрезанных колец, ткань (рис. 6) собирается из целых колец.

При обрыве одного кольца кольчуга остается целой, а ткань из «двойных скобок» рассыпается. А существует ли такое плетение, которое можно собирать из целых колец, но чтобы при обрыве любого кольца прочность ткани не нарушалась? Если существует положительный ответ на этот вопрос, он может совершить революцию в трикотажном деле. Ведь ткани, связанные из одной нитки, обладают существенным недостатком — обрыв одной ниточки вызывает расплзание дырки. А вязь кольчуги и красива и прочна.

В решении такой задачи может помочь математическое исследование зацеплений колец. Этими вопросами занимается ветвь математики, называемая *топологией*, а вернее, ее раздел — *теория узлов и зацеплений*, сочетающий в себе тонкую геометрию и остроумную алгебру. Продолжается исследование и новых интересных зацеплений других типов.

7. СВЕТ И ЦВЕТ

С ЛИНЗОЙ И БЕЗ...

А. А. Дозоров



Наверное, нет такого мальчика, который не играл бы с увеличительным стеклом (линзой). Впрочем, и девочки тоже. А хорошо ли вы знаете линзы? Это можно легко проверить на опытах.

1. Если у вас есть стеклянная линза, ограниченная двумя выпуклыми поверхностями (одна из них может быть плоской или даже вогнутой), получите с ее помощью изображение Солнца на листе белой бумаги. Лучи от Солнца, находящегося очень далеко от Земли, падают на Землю практически параллельным пучком. Линза собирает эти пучки в точке, называемой фокусом. Расстояние от линзы до фокуса называют фокусным расстоянием. Определите фокусное расстояние вашей линзы. Подумайте, почему стеклянную линзу иногда называют «зажигательным стеклом»?

2. Подойдите к включенному телевизору, расположите линзу между экраном и листом белой бумаги. Перемещая лист, получите на нем четкое изображение телевизионного экрана. Каким будет это изображение?

Кстати сказать, точно так же устроен фотоаппарат, только там роль белого листа бумаги играет фотопленка или фотопластинка.

Нетрудно получить изображение окна, включенной настольной лампы, удаленного здания. Может быть, вы сумеете таким образом «сфотографировать» своего товарища.

Попробуйте вращать линзу вокруг оси, перпендикулярной плоскости сечения линзы. Поворачивается ли изображение?

3. Получив на листе бумаги какое-нибудь изображение, внимательно рассмотрите его. Затем закройте половину линзы. Что изменилось при этом? Ну, конечно, изображение осталось на том же месте и тех же размеров, но яркость его уменьшилась. Постарайтесь объяснить это.

4. В принципе любое прозрачное тело с неплоской поверхностью образует линзу. Так, очень хорошо увеличивают предметы стеклянные шарики, причем оказывается, чем меньше шарик, тем больше его увеличение. Именно маленький шарик был главной частью в первом микроскопе.

Если у вас есть такой шарик, вы можете сделать себе неплохой карманный микроскоп. Для удобства шарик лучше закрепить в оправу. Рассматриваемый предмет надо располагать как можно ближе к шарiku.

Стеклянные палочки (их можно найти в школьном химическом кабинете) — тоже линзы.

Даже волнистая поверхность воды действует как линза. Включите свет в ванной комнате, налейте в ванну воды и слегка взволнуйте воду — по дну ванны побегут светлые «зайчики».

Сделайте те опыты, о которых мы рассказали, и подумайте, какие еще интересные опыты можно провести с линзой.

Только что мы советовали вам проверить на опытах, хорошо ли вы знаете линзу. Теперь предлагаем вам провести еще несколько опытов по оптике, но уже без специальных оптических приборов.

1. Возьмите серебряную обертку от шоколадной конфеты. Разгладьте ее и проткните в ней маленькое отверстие. Через это отверстие, расположив его как можно ближе к глазу, посмотрите на какой-нибудь ярко освещенный текст, помещенный тоже близко к глазу. Вам удалось увидеть сильно увеличенные буквы? Оказывается, не только линза может увеличивать!

А какое изображение буквы вы увидели — прямое или перевернутое? Кажется бы, буква должна быть перевернутой (посмотрите на рис. 1) — на сетчатке глаза все изображения получаются всегда перевернутыми. Но наш мозг «знает» об этом и к этому «привык»: окружающие нас предметы мы воспринимаем не в перевернутом виде.

В непрозрачной бумаге проткните иглой отверстие. В затемненной комнате перед отверстием зажгите свечу, а с другой стороны отверстия поместите белый лист бумаги — экран. На экране вы увидите четкое перевернутое изображение свечи. Это простое устройство — модель так называемой камеры-обскуры (камеры для наблюдений), которая с давних времен использовалась для получения различных изображений. Камера-обскура является простейшим фотоаппаратом.

2. В том, что мозг действительно «переворачивает» изображение предмета, можно убедиться на таком простом опыте. Между отверстием в фольге (в серебряной бумажке) и глазом поместите небольшой предмет — острие карандаша или булавоочную головку. Свет от отверстия создаст на сетчатке неперевернутое изображение предмета (рис. 2). А мозг «по инерции» это изображение перевернет.

3. Отодвиньте фольгу сантиметров на 20 от глаза и посмотрите через отверстие на достаточно яркий источник света. Только осторожно, чтобы не переутомить глаз. Вы увидите расходящиеся от отверстия световые лучи и вокруг отверстия —



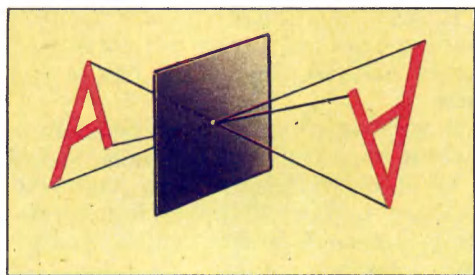


Рис. 1

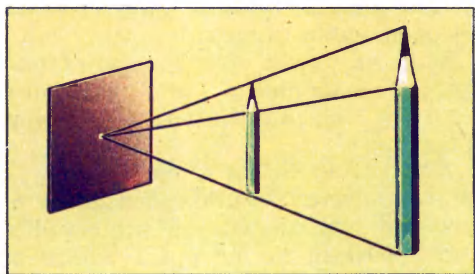


Рис. 2

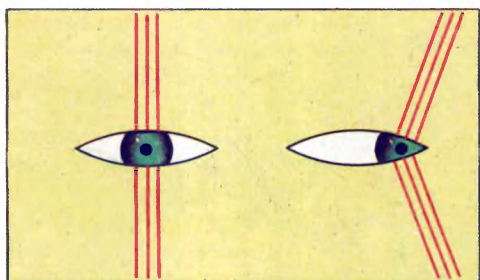


Рис. 3

окрашенные во все цвета радуги кольца. Как это можно объяснить?

Оказывается, свет, подобно волнам на поверхности воды, способен огибать встречающиеся на его пути препятствия.

Поговорим немного о волнах на воде. Как известно, большие и маленькие волны по-разному огибают препятствия. Если, например, из воды торчит столб, то мелкие волны (рябь) образуют за столбом заметную «тень» (область спокойной поверхности воды). Крупные же волны практически никакой «тени» не дают, они хорошо огибают препятствия.

Что значит «мелкие» и «крупные» волны? Почему они по-разному ведут себя при встрече с препятствием? Существует такое понятие — длина волны. Это — расстояние между двумя соседними гребнями (или впадинами) волны. Так вот, мелкие волны по сравнению с крупными

имеют гораздо меньшую длину волны. А чем больше длина волны (по сравнению с препятствием), тем сильнее волна огибает препятствие.

То же самое происходит и со световыми волнами: если на пути света встретилось препятствие, свет его огибает. Вот почему вы видели расходящийся от отверстия в фольге световой пучок. А как появились разноцветные кольца? Все дело в том, что белый свет состоит из лучей разного цвета. Следуя Ньютону, принято выделять семь цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фиолетовый. Для каждого цвета длина световой волны своя. Самая большая длина волны у красного света ($\lambda_{\text{кр}} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$), а самая маленькая — у фиолетового ($\lambda_{\text{ф}} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$). Теперь вам все понятно, не правда ли?

4. Лезвием от безопасной бритвы прорежьте в фольге узкую щель: просто проведите лезвием по фольге. Отодвиньте фольгу от глаза сантиметров на 10, посмотрите через щель на окно. Вы увидите несколько темных полосок, параллельных щели. Если их видно плохо, не огорчайтесь. Просто у вас получилась слишком широкая щель. Разгладьте фольгу со щелью — щель станет уже, а картина лучше. Если и это не поможет, проведите по фольге лезвием еще раз.

Получив хорошую щель, придвиньте щель к глазу и посмотрите через нее на настольную лампу с прозрачным стеклом или (осторожно!) на Солнце. Смотрите чуть ниже источника света. Видите, перпендикулярно направлению щели возникли два световых столба, на которых видны яркие радужные полосы.

Если щель прорезана удачно, то полосок много, а цвета их глубокие и сочные. Обратите внимание на расположение цветов.

Оба опыта, как и предыдущий, объясняются огибанием световыми волнами краев щели.

Очень хорошую щель можно сделать из лезвия для безопасной бритвы. Из плотной бумаги нужно вырезать два прямоугольника размерами чуть больше лезвия, середину у прямоугольников тоже надо вырезать. В эту рамочку вставьте разломанное пополам лезвие так, чтобы его острые края почти соприкасались.

Две половинки рамки с лезвием между ними склейте — теперь у вас есть хорошая щель.

5. Известно, что огибание края препятствия световой волной можно наблюдать, вообще ничего не имея под руками. Посмотрите вечером в окно. Вы увидите яркие точки светящихся фонарей. Прищурьте глаз (веки образуют щель) — свет от фонарей загнется вверх и вниз, вместо светящейся точки получатся два вертикальных столба лучей (рис. 3,а). Продолжая щуриться, поверните голову немного вбок. Щель, образуемая веками, изменит свою форму — лучи от фонарей разойдутся теперь под углом (рис. 3,б).

6. Проткните карандашом отверстие в газете, прикройте газетой настольную лампу и с расстояния в несколько метров посмотрите на пучок

7. На случайным образом расположенных мелких препятствиях тоже можно наблюдать аналогичные картины.

В морозный вечер соскребите лед с оконного стекла. Осторожно подуйте на чистое место — оно затянется мелкими случайно расположенными кристалликами льда. Теперь посмотрите через это отверстие на уличные фонари. Вокруг них возникнут цветные кольца. Обратите внимание на то, что разные лампы дают разный цветовой набор колец.

Если на улице тепло, то этот опыт можно выполнить с небольшим стеклом, охлажденным в холодильнике.

Можно провести очень много подобных опытов: с копировальной бумагой, с граммофонной пластинкой, с негативами, на которых сфотогра-



света из отверстия через капроновую ленту. Нити ленты образуют щель в двух взаимно перпендикулярных направлениях, поэтому свет загибается тоже в двух направлениях.

фированы всевозможные однородные и неоднородные структуры.

Попробуйте самостоятельно придумать аналогичный опыт, и вы получите еще большее удовольствие.

СЮРПРИЗЫ ЗЕЛЕНОГО СТЕКЛА

В. А. Фабрикант

Какого цвета зеленое стекло?

Этот вопрос может вызвать чувство естественного недоумения. Читатель с раздражением скажет: зеленое стекло потому и называется зеленым, что оно... Однако не надо спешить со снисходительными разъяснениями. Нехитрый опыт покажет вам, что вопрос о цвете зеленого стекла совсем не так прост.

Если у вас есть кусок зеленого стекла, разбейте его осторожно на несколько не очень маленьких кусочков. Затем посмотрите сквозь один из них на нить лампы накаливания. Как вы и ожидали, нить будет казаться зеленой (рис. 1). Наложите на этот кусочек стекла второй и снова посмотрите на нить.

Вероятно, вы не заметите изменения цвета нити, она будет зеленой по-прежнему. Но если наложить на два кусочка стекла третий и посмотреть сквозь все три кусочка на нить, вы увидите ее уже неокрашенной — белесоватого цвета. Сквозь четыре кусочка нить будет казаться красноватой, а сквозь пять кусочков — рубиново-красной!

Результат совершенно неожиданный и весьма поучительный. Оказывается, цвет стекла зависит от толщины, и зеленое в тонком слое стекло становится красным при достаточно большой толщине слоя. Таким свойством обладает, конечно, не каждое зеленое стекло, но как раз самые распространенные дешевые сорта зеленых стекол.

Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампы накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет виден рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло.

Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным — при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печки кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекла за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождя еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно

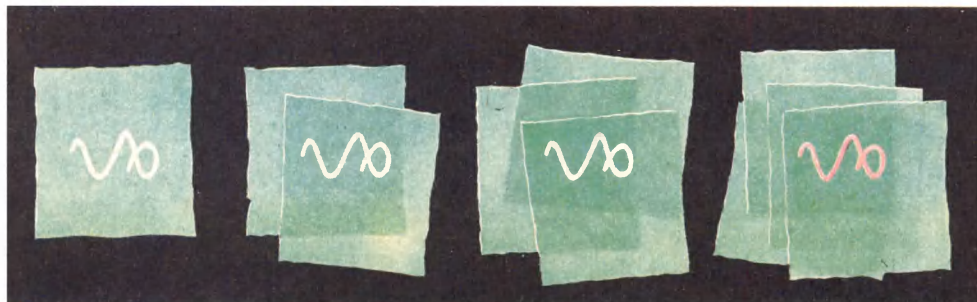


Рис. 1

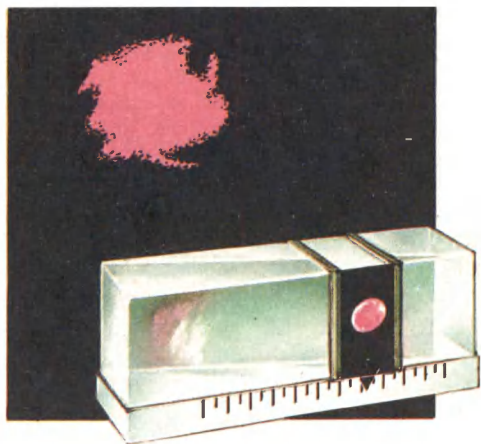


Рис. 2

судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, — пирометрического клина (рис. 2). Он представляет собой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин движется в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела.

Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например, в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

Наверное, многие из вас знают знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что сол-

нечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом. В этом случае от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло пропускает не только зеленые, но и красные лучи.

Вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт с клином. В качестве источника света используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис. 3). На стене мы опять увидим две полоски — зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная. При увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, и, начиная с некоторого момента, красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок — красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разъяснена. Однако остается еще объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести пятьдесят назад.



Рис. 3

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине XVIII столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с измерениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его также называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон — лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегают его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго — 243, к концу третьего — 81, четвертого — 27, пятого — 9, шестого — 3. Наконец, седьмой километр заканчивает

только один бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось воспользоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, то есть одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и т. д. Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, втрое и т. д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии. Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили весьма великодушные условия.

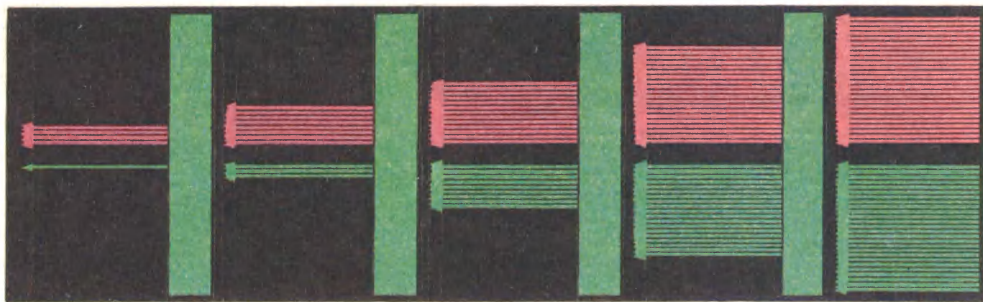


Рис. 4

На старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров. Победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера — красные.

После первого километра сторонники новичков приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз; 729 бегунов, а у мастеров — 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243 человека, а «красных» — 128. После третьего километра «зеленых» — 81, а «красных» — 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» — 27, а «красных» — 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос.

Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых» — 9, «красных» — 16, после шестого — 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов, пробежавших различные дистанции, для обеих команд:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1;
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше, — одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в изменении чисел не только достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис. 4). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металличе-

ский предмет, тем более даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале нить лампочки накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале — более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных.

Значит, при более высокой температуре разница в яркости зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.



ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

1. Неравноплечие чашечные весы уравнивают, положив на одну из чашек небольшой грузик. Можно ли теперь взвешивать на этих весах обычным способом?

2. Плоскую фигуру разрезали на две части по прямой, проходящей через центр масс. Равны ли массы этих частей?

3. Ведро с водой свободно падает дном вниз. В боковых стенках и дне ведра имеются отверстия. Будет ли выливаться вода через эти отверстия?

4. Утка при ходьбе переваливается с боку на бок, а курица нет. Почему?

5. Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить бревно?

6. У вас есть пружинные весы (динамометр), рассчитанные максимум на 200 Н, а вам надо взвесить чемодан, который примерно в 1,5 раза тяжелее. Можете ли вы это сделать? Как?

7. На весах уравновешены сосуд с водой и штатив с грузом. Груз подвешен так, что он находится над сосудом. Нарушится ли равновесие, если груз опустится в сосуд с водой? На какую чашку весов надо положить довесок, чтобы равновесие восстановилось?

8. Фигуристка, вращаясь при парном катании вокруг своей оси, 20 раз повернулась лицом к своему партнеру, который за это время, равное 10 с, сделал два оборота вокруг фигуристки. Сколько оборотов в секунду выполняла фигуристка?

9. Конькобежец, бежавший дистанцию 500 м, первые 100 м пробе-

жал со скоростью 10 м/с, следующие 300 м со скоростью 11 м/с и последние 100 м со скоростью 13 м/с. С какой средней скоростью конькобежец пробежал всю дистанцию?

10. Металлический стержень уравновешен в горизонтальном положении на узкой опоре. Опора находится на середине стержня. Сохранится ли равновесие, если одну половину согнуть пополам?

11. По реке плывет весельная лодка и рядом с ней щепка. Что легче для гребца — обогнать щепку на несколько метров или на столько же метров отстать от нее?

12. Вам нужно определить массу тела. Известно, что чашечные весы, которыми вы можете пользоваться, «неправильные». Зато гири — «правильные». Как определить с их помощью массу тела?

13. Почему, когда вы наливаете воду в бутылку через воронку, вода в воронке иногда «застывает»?

14. Мальчик поймал в реке рыбу. Ему захотелось тут же хотя бы приблизительно определить массу этой рыбы.

Как он может это сделать, если у него есть ровная прочная удочка и в своих запасах он нашел буханку хлеба массой в 1 кг?

15. Барон Мюнхаузен рассказывает про следующий «правдивый случай», происшедший с ним. Он разбежался, чтобы прыгнуть через болото. Во время прыжка он заметил, что не допрыгнет до противоположного берега. Тогда прямо в воздухе он повернул обратно и возвратился на берег, с которого прыгал. Почему это невозможно?

16. Известно, что свет проходит расстояние от Солнца до Земли приблизительно за 8 минут. Если бы свет распространялся мгновенно, увидели бы мы на Земле восход Солнца на 8 минут раньше?

17. Когда мы смотрим из окна движущегося вагона, то видим, что все предметы за окном «бегут» навстречу поезду — чем дальше предмет, тем медленнее он «бежит». Почему?

18. Аквалангист под водой потерял ориентацию. Как он может определить, где верх, а где низ?

19. Известно, что длина тени, которую отбрасывают предметы, в течение дня меняется. Самая короткая тень — в полдень, к вечеру тень



«растет». А есть ли на Земле такое место, где длина тени в течение дня не меняется?

20. Лаборантка утром взвесила на особо точных весах открытый сосуд с только что вскипевшим маслом. К концу дня, когда масло остыло, она взвесила сосуд еще раз. Результат взвешивания оказался иным. Каким? Почему?

21. Известно, что для измерения толщины тонких проволочек или пластин используются приборы для точных измерений: например, штангенциркуль или микрометр. К сожалению, у вас под рукой не оказалось таких приборов. Как бы вы поступили, чтобы измерить как можно точнее толщину одно- и двухкопеечной монеты? листа бумаги в тетради или книги? фольги для обертывания шоколадных конфет?

22. Останкинская телебашня высотой 530 м имеет массу 30000 т. Какова будет масса точной копии этой башни высотой 53 см?

23. В кастрюле с тяжелой крышкой вскипятили воду. Кастрюлю сняли с плиты, после чего в спокойную воду насыпали чайную заварку. Вода бурно закипела. Объясните явление.

24. Мальчик пускал в ванне с водой пластмассовый кораблик, нагруженный металлическими деталями от конструктора. Вдруг кораблик наклонился, и детали высыпались в воду. Изменился ли уровень воды в ванне?

25. Почему грязный, покрытый копытью снег тает быстрее, чем чистый?

26. В стакан с сахаром и в стакан без сахара налили горячий чай из одного чайника. В каком стакане чай холоднее?

27. Почему керосиновая лампа гаснет, если подуть сверху в ее стеклянный колпак, хотя, если дуть снизу, потушить лампу не удастся?

28. Два шарика одинаковой массы — свинцовый и стальной — падают с одинаковой высоты на песок. Какой из них больше нагреется?

29. В ветренный день нам становится теплее, если мы «спрячемся»

от ветра. А одинаковы ли показания термометра на ветру и «за углом»?

30. Температура пламени свечи 1600 °С. Температура плавления железа 1400 °С. Почему же гвоздь не плавится на свечке?

31. Вам надо подогреть на спиртовке воду. Для этого предлагаются два стакана: один из толстого стекла, другой из очень тонкого стекла. Какой стакан вы выберете?

32. Два сосуда одинаковых объемов доверху наполнены теплой водой. Чтобы остудить воду, один сосуд ставят на лед, а на другой сосуд сверху кладут большой кусок льда. В каком сосуде вода остынет быстрее?

33. Для того чтобы скошенное сено высохло, его часто ворошат. Почему это помогает?

34. Провода подключены к однородному металлическому шару в диаметрально противоположных точках. В каком сечении шара при пропускании через него электрического тока выделяется больше тепла?

35. Что произойдет, если включенный электронагреватель вынуть на некоторое время из воды?

36. Длинный коридор имеет электропроводку. Человек, войдя с одного конца коридора, включил лампу, а пройдя коридор, выключил ее. Какова схема проводки, если лампочку можно включать и выключать из обоих концов коридора?

37. В вашем распоряжении «прямой» магнит и иголка. Как определить, намагничена ли иголка?

38. Из двух одинаковых кусков одного и того же металла изготовили две проволоки, одна из которых длиннее другой в 4 раза. Как по-вашему, одинаковы или различны сопротивления этих проволок?

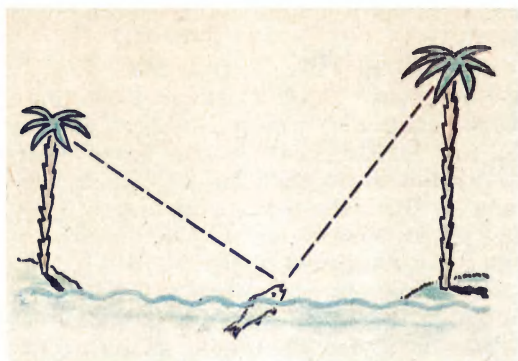
39. Почему вечером человек хуже различает очертания предметов, чем днем?

40. Почему кристаллики соли бесцветные, а в массе соль серая или белая?

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. У ювелира во время шлифовки раскололся бриллиант, в результате стоимость его снизилась на 32%. Какая часть бриллианта откололась, если стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы?

2. На противоположных берегах реки напротив друг друга растут две пальмы. Высота одной из них 10 м, другой — 15 м, расстояние между основаниями пальм 25 м. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно птицы заметили рыбу, выплывшую



на поверхность реки между пальмами. Птицы бросились к рыбе и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы выплыла рыба?

3. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится 5 раз в день с 7 до 19 часов». И действительно, первый раз почтальон подходит к ящику в 7 часов утра, а последний — в 7 часов вечера. Через какие интервалы времени вынимают письма из ящика?

4. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп и 20 коп, причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

5. Володя написал на доске

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 21,$$

причем вместо звездочек он поставил либо плюс, либо минус. Саша переправил несколько знаков на противоположные, и в результате вместо числа 21 получил число 20. Можно ли утверждать, что по крайней мере один из мальчиков допустил ошибку при подсчете результата?

6. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, 3 пачки табаку и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов (в одном долларе 100 центов), на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

7. Четыре юных филателиста Митя, Толя, Саша и Петя купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили советские марки, один — болгарские, а один — чехословацкие. Известно, что Митя и Толя купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили и Митя с Сашей, Петя с Сашей, Петя с Митей и Толя с Сашей. Кроме этого, известно, что Митя купил не болгарские марки. Определить, марки каких стран купил каждый из них.

8. Я моложе своего деда во столько же раз, во сколько старше своей сестры. Сколько мне лет, если моей сестре еще нет 7 лет, а мне вместе с дедом уже 84 года?

9. Ира, Таня, Коля и Лёня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

10. Однажды первый вторник месяца я провел в Ленинграде, а первый вторник после первого понедельника — в Риге. В следующем месяце я первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца я был в каждом из этих городов?

11. Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада. Анна выпила 2 стакана, Мария — 3, Софья — 4, Дарья — 5. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил

стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена. Кто на ком женат?

12.— У нас в классе 35 человек. И можешь себе представить, каждый дружит ровно с 11 одноклассниками...

— Не может быть этого,— сразу ответил своему приятелю Витя Иванов, победитель олимпиады.

Почему он так решил?

13. Три гангстера украли из сейфа 10 бриллиантов общей стоимостью 4 000 000 долларов. При этом они рассчитывали разделить бриллианты так, чтобы каждому досталось не меньше 1 000 000 долларов. При пого- не один из бриллиантов стоимостью 600 000 долларов потерялся, и такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале, или гангсте- ры заведомо ошибались?

14. В некотором царстве каждые двое — либо друзья, либо враги. Каждый человек может в некоторый момент поссориться со всеми друзья- ми и помириться со всеми врагами. Оказалось, что каждые три человека могут таким образом стать друзьями. Докажите, что тогда и все люди в этом царстве могут стать друзьями.

15. Из книги выпал ее кусок. Первая страница куска имеет номер 387, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?

16. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира.

— Обратите внимание, заметил черноволосый,— один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволо- сый. Но ни у кого цвет волос не соот- ветствует фамилии. Забавно, не прав- да ли?

— Ты прав,— подтвердил мастер.

Какого цвета волосы у кандидата в мастера?

17. Однажды в минуту отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили немного поразвлечься в перетягивании каната. Портос с д'Артаньяном легко перетя- нули Атоса с Арамисом. Но когда Портос стал в паре с Атосом, то побе- да против Арамиса с д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос с Арамисом оказались против Атоса с д'Артаньяном, то ни- какая из этих пар не смогла одолеть

другую. Определите, как мушкетеры распределяются по своей силе.

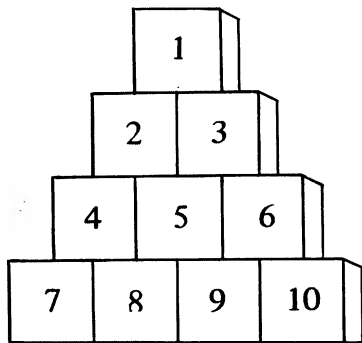
18. Можно ли раскрасить волей- болльный мяч, состоящий из 18 частей (см. рисунок), в три разных цвета так,



чтобы соседние части не были раскра- шены в один цвет? Если можно, то как?

19. «Бьют часы двенадцать раз...» поется в популярной песне. А сколько всего ударов в сутки делают часы, если в двенадцать часов (дня или ночи) они бьют двенадцать раз, в два часа — два раза и т. д., да еще в про- межутках бьют один раз, отмечая середину каждого часа?

20. Переложите пирамиду из деся- ти кубиков (см. рисунок) так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



21. Один гражданин захотел вы- пить стакан сока. Он подошел к киоску и выложил перед продавцом все деньги, которые у него были — бумажные купюры и мелочь. Прода- вец пересчитала деньги, положила их в общую выручку, затем налила стакан сока стоимостью 9 копеек и отсчитала сдачу. Но при этом она ошиблась: дала столько копеек, сколь- ко полагалось дать рублей, а рублей дала столько, сколько полагалось дать копеек. Гражданин, не считая, поло- жил деньги в карман и ушел, а придя

домой, обнаружил, что денег у него стало в 4 раза больше, чем было. Сколько денег было у гражданина?

22. Мне сейчас в 4 раза больше лет, чем было моей сестре, когда она была моложе меня в 2 раза. Сколько лет сейчас каждому из нас, если через 15 лет нам вместе будет 100 лет?

23. Какое наибольшее количество месяцев одного года может иметь по 5 пятниц?

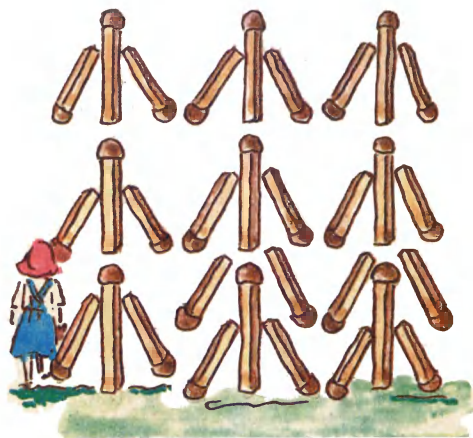
24. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

25. Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.

26. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки больше двух лепестков).

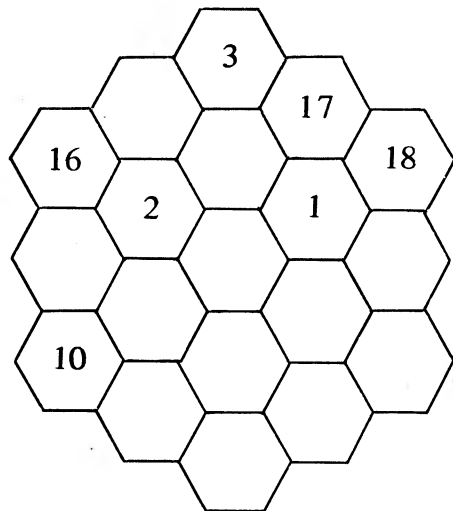
27. Два человека бегут по ступеням эскалатора метро. Один бежит быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступеней?

28. На рисунке изображен лес (из спичек) и Красная Шапочка, идущая к бабушке. Переложите две спички



так, чтобы Красная Шапочка возвратилась обратно.

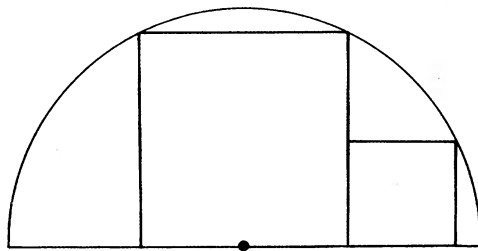
29. Заполните свободные клетки шестиугольника натуральными числами так, чтобы в них оказались все числа от 1 до 19 и во всех пяти



рядах каждого из трех направлений (вертикального и двух наклонных) сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.

30. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Ответив на последний тест, Джон понял, что если бы за этот последний тест он получил 97 очков, то его средний балл равнялся бы 90. С другой стороны, если бы он получил за последний тест всего 73 очка, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

31. Два квадрата расположены внутри полукруга так, как показано на рисунке. Докажите, что площадь



большого квадрата в четыре раза превосходит площадь меньшего квадрата.

32. Девять одинаковых книг стоят меньше десяти рублей, а десять таких же книг стоят больше одиннадцати рублей. Сколько стоит одна книга?

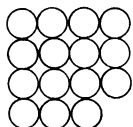
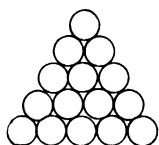
голововилке



33. Если Аня идет в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она затрачивает полтора часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь занимает у нее тридцать минут. Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идет пешком?

34. Туристы купили в магазине сто предметов: спички (цена 1 коп за коробку), пирожки (по 10 коп) и консервы (цена 50 коп за банку). За все уплатили 5 руб. Сколько предметов каждого товара куплено?

35. 15 шариков можно сложить в виде треугольника, но нельзя сложить в виде квадрата — одного шарика не хватает (см. рисунок). Из какого количества шариков, не превосходящего



50, можно сложить как треугольник, так и квадрат?

36. Ученик 6 класса Петя Иванов придумал две новые теоремы:

1) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27;

2) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Сможет ли Петя доказать эти теоремы?

37. На улице, став в кружок, беседуют 4 девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочками в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валею. Какое платье носит каждая из девочек?

38. Если головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгада-

ли эту, была труднее, чем головоломка, которую вы разгадали после того, как вы разгадали головоломку, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, то была ли головоломка, которую вы разгадали перед тем, как разгадали эту, труднее, чем эта?

39. Разрежьте параллелограмм по прямой, проходящей через его центр, так, чтобы из полученных двух кусков можно было сложить ромб.

40. В книгах новгородских писцов XV века упоминаются такие меры жидких тел: бочка, насадка и ведро. Из этих же книг стало известно, что 1 бочка и 20 ведер кваса уравниваются с тремя бочками кваса, а 19 бочек, 1 насадка и 15,5 ведра уравниваются с 20 бочками и 8 ведрами. Могут ли историки на основании этих данных определить, сколько насадок содержится в бочке?

41. Можно ли из двадцати монет достоинством в 5, 20 и 50 коп составить 5 рублей?

42. Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем их доля среди всего населения. Верно ли, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения?

43. Четыре футбольные команды «Старт», «Комета», «Ракета» и «Вымпел» провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготавил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатаала таблицу с образца и отдала ее судье. Но оказалось, что печатная машинка (она была очень старая) почти ничего не отпечатаала (см. рисунок). Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1, 5 : 3. Помогите судье заполнить таблицу! (В графе «Мячи» слева записывается количество забитых мячей, справа — количество пропущенных мячей. За победу начисляется 2 очка, за ничью — по 1 очку.)

Команды	Старт	Комета	Ракета	Вымпел	Победа	Ничья	Пораж.	Мячи	Очки
Старт									6
Комета				1 : 0				2—	
Ракета								—8	
Вымпел									

44. В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — кабарасов или барабасов?

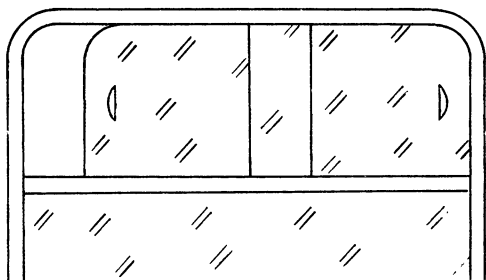
45. Докажите неравенство

$$\text{ДВА} \times \text{ШЕСТЬ} < \text{ДВАДЦАТЬ}.$$

(Здесь каждая буква обозначает цифру, причем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые.)

46. Существует ли такой год, в котором тринадцатое число ни разу не является понедельником? А какое наибольшее число раз оно может быть понедельником?

47. Окна в вагонах метро имеют форму, изображенную на рисунке.



Закругления верхних углов рамы и стекла обычно делаются в виде дуги окружности. Окно приоткрыли, сдвинув стекло на 10 см. Высота подвижной части окна равна 25 см. Чему равна площадь открытой части окна?

48. В очереди в школьный буфет стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит впереди Миши, но после Олега, Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володиёй. В каком порядке стоят ребята?

49. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

50. Школьники Вадик и Саша увидели весы и взвесили на них свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда они поставили на весы оба портфеля, то весы показали 6 кг.

— Как же так? — воскликнул Саша. — Два плюс три не равняется шести?

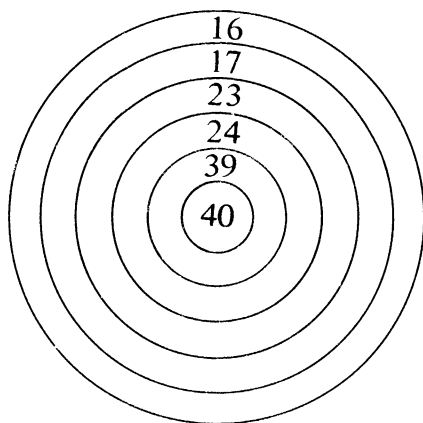
— Разве ты не видишь? — ответил Вадик. — У весов сдвинута стрелка.

Так сколько же весили портфели на самом деле?

51. Часы с боем делают 3 удара за 4 секунды. За сколько секунд они сделают 9 ударов?

52. Сумма тройки чисел 1, 2 и 3 равна их произведению. Существуют ли еще такие тройки целых чисел?

53. На рисунке изображена мишень. Куда нужно попасть и сколько



сделать выстрелов, чтобы выбить ровно 100 очков?

54. У меня в трех коробках лежали гвозди, винты и гайки. На каждой коробке было написано что в ней лежит. Одажды мой младший брат пересыпал содержимое коробок так, что надпись на каждой коробке перестала соответствовать ее содержимому. Хорошо еще, что он не перепутал их между собой: гвозди остались лежать отдельно от гаек и винтов и т. д. Можно ли, открыв одну из коробок, определить, что лежит в других?

55. Найдите два числа, сумма, произведение и частное которых равны между собой.

56. Придумайте четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечетными числами.

57. На часах 8 ч 20 мин. Чему равен угол между стрелками?

58. Начнем считать пальцы на правой руке. Первым будет большой, вторым — указательный, третьим — средний, четвертым — безымянный, пятым — мизинец, шестым — снова безымянный, седьмым — средний, восьмым — указательный, девятым — большой, десятым — указательный, и т. д. Какой палец будет 1979-м?

59. Какую последнюю цифру имеет произведение всех нечетных чисел от 1 до 99?

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

1. Если после уравнивания весов на одну из чашек положить груз, то в качестве противовеса придется взять другой груз, масса которого найдется из условия равенства моментов сил тяжести первого и второго груза. Поскольку весы неравноплечие, то «показание» весов не будет равно массе искомого груза.

2. Положение центра масс определяется не значением масс частей, находящихся по разные стороны от него, а расстояниями, на которых находятся центры масс частей (определяющими являются моменты сил тяжести). Поэтому, если центры масс, полученных после разрезания кусков, находятся на одинаковых расстояниях от общего центра масс, то массы частей одинаковы, если же центры масс частей находятся на разных расстояниях от общего центра масс, то и массы будут разными.

3. Если ведро стоит на земле, то вода выливается из дырок вследствие разности давлений в воде, на ее поверхности и в месте расположения дырки. При свободном падении ведра вода оказывается «ненапряженной» и упомянутая выше разность давлений пропадает. Если считать, что ведро небольшое и изменением давления окружающего воздуха по высоте ведра можно пренебречь, то вода из дырок выливаться не будет.

4. Если утка стоит, то вектор ее силы тяжести проходит вне участков соприкосновения лап утки с землей, поэтому при поднимании одной из лап (при передвижении утки), чтобы не упасть, утка переносит центр масс в сторону, противоположную поднятой лапе. У курицы же лапы всегда находятся под туловищем, так что центр масс всегда находится над площадью опоры, и переваливаться не приходится.

5. Для простоты рассуждений вместо бревна нальем в лодку еще воды, масса которой будет равна массе бревна, что приведет к тому же изменению уровня воды внутри лодки. Таким образом, сила, действующая на лодку вниз, изменится на величину силы тяжести налитой воды (или брошенного бревна). Корпус лодки дополнительно погрузится в воду. Если бы в положении равновесия лодки уровень заборной воды сравнился с уровнем воды внутри ее, то выталкивающая сила, действующая на лодку вверх, возросла бы на величину силы тяжести налитой в лодку воды плюс силу тяжести воды в объеме дополнительно погружен-

ной части самой лодки. Если толщина стенок лодки существенна, то вторая добавка значительна, и следовательно, в положении равновесия уровень воды вне лодки будет ниже уровня воды внутри лодки.

6. Можно положить чемодан на землю самой большой гранью, привязать к ручке динамометр и потянуть вверх. Чемодан начнет приподниматься, когда сила его тяжести будет равна половине той силы, которую показывает динамометр (мы воспользовались правилом моментов).

7. Если груз окажется в сосуде, то появится сила давления груза на воду, направленная вниз, в свою очередь на величину выталкивающей силы изменится сила натяжения, действующая на штатив и направленная тоже вниз. Поэтому для установления равновесия необходимо на чашку, где находится штатив, положить довесок, сила тяжести которого равна удвоенной выталкивающей силе, действующей на груз.

8. Ответ, очевидно, зависит от того, в какую сторону вращался фигурист. Если он вращался в ту же сторону, что и фигуристка, то за 10 с фигуристка относительно земли сделала 20 плюс 2 оборота. Если же фигурист вращался в противоположную сторону, то за 10 с фигуристка сделала 18 оборотов (задача на относительность движения).

9. Чтобы найти среднюю скорость конькобежца, найдем время, за которое он пробежал 500 м. Первые 100 м он пробежал за время $t_1 = 100/10 = 10$ с. Следующие 300 м он пробежал за время $t_2 = 300/11 \approx 27$ с, последние 100 м он пробежал за время $t_3 = 100/13 \approx 8$ с. Таким образом полное время бега равно $T = t_1 + t_2 + t_3 \approx 45$ с. Следовательно, средняя скорость равна $v_{cp} = 500/45 \approx 11$ м/с.

10. Если мы согнем одну из половин, то уменьшим расстояние от центра ее масс до первоначального положения центра масс всего стержня. Поэтому общий центр масс сместится в сторону несогнутой половины и равновесие не сохранится.

11. Перейдем в систему отсчета, связанную с рекой. В этой системе отсчета щепка покоится, а усилия гребца направлены на то, чтобы перемещаться относительно щепки в разные стороны, при этом эти усилия не зависят от направления его перемещения. Переход к наблюдателю, связанному с берегом, не изменит ситуацию. Таким образом, гребцу все равно, обгонять щепку или от нее отставать — усилия требуются одинаковые.

12. Для того чтобы определить массу тела, используя «неправильные» весы и «правильные» гири, советуем взвешивание произвести дважды на разных чашках. Для нахождения ответа взять среднее геометрическое полученных двух результатов. (Почему?)

13. Скорость «пропускания» жидкости воронкой определяется сечением ее тонкой части. Поэтому может оказаться, что скорость поступления жидкости в верхнюю часть воронки, определяемая скоростью ее выливания из бутылки, превзойдет скорость пропускания воронки. В этом случае и произойдет «застывание» воды в воронке.

14. Мальчик может использовать в качестве рычага свою удочку, к одному концу которой он может подвесить буханку хлеба (известной массы), на другом конце будет подвешена пойманная рыба. Найдя такую точку удочки, подложив палец под которую, он

добьется равновесия удочки, и легко определит массу рыбы. Действительно, масса рыбы относится так к массе буханки хлеба, как расстояние до места крепления буханки относится к длине оставшегося куска удочки. В этом варианте мы пренебрегли массой самой удочки. В случае, если рыба маленькая, то масса удочки будет существенна. Необходимо сначала с использованием буханки и пальца найти центр масс удочки и ее массу, а затем перейти к нахождению массы рыбы.

15. Если бы то, что рассказывал Барон Мюнхаузен было правдой, то не выполнялся бы закон изменения импульса. Действительно, чтобы изменить скорость полета, а значит и импульс Барона, должна подействовать какая-то внешняя сила, а как видно из рассказа, Барон лишь «усилием воли», иначе говоря, используя внутренние силы, изменил направление скорости полета на обратное.

16. Если бы свет распространялся мгновенно, то и заход Солнца наступил бы на 8 минут раньше (по шкале «абсолютного» времени), таким образом, все явления, связанные в поступлении солнечной энергии на Землю сдвинулись бы во времени, еще в самом начале создания Вселенной. А мы бы уже ничего не заметили.

17. Скорость перемещения предметов за окном при нашем ее восприятии определяется угловым смещением предмета по отношению к направлению наблюдения, а не абсолютным смещением его относительно поезда. Но чем дальше предмет, тем это угловое смещение меньше, а значит и кажущаяся его скорость меньше.

18. Он может, например, сориентироваться по направлению всплывания выдыхаемого им воздуха — пузырьки воздуха устремляются

к поверхности воды. Если у него окажется тяжелый предмет, то отпустив последний, он сможет определить, где «низ».

19. Изменение размера тени определяется вращением Земли. Поэтому там, где линейная скорость, вызванная вращением, минимальна, а значит, на полюсе, там и изменение тени будет минимальным.

20. При кипячении масла лаборантка добилась того, что воздух, содержащийся в масле, «ушел». При остывании масла определенная доля молекул воздуха опять оказалась в масле, таким образом, масса содержимого в сосуде могла только возрасти.

21. Для того чтобы найти толщину тонкого листа бумаги, используя подручные измерительные приборы, нужно измерить толщину «стопки» из листов бумаги. Получить стопку можно путем складывания листа бумаги. Толщину листа найдем, разделив толщину стопки на число листов в стопке.

22. Говоря о точной модели телебашни, будем подразумевать, что подобие не только геометрическое, но и физическое, иначе говоря выполняется соответствие в материалах ее частей. Поскольку линейные размеры башни уменьшены в 10^3 раз, то объемы соответствующих частей изменились в 10^9 раз, а поскольку плотности материалов, из которых сделаны башня и ее модель, не изменились, то масса модели относится к массе башни как 10^{-9} и будет равна 30 г.

23. После того как кастрюлю сняли с плиты, ее содержимое стало охлаждаться, причем в момент снятия насыщенные пары воды занимали все свободное пространство внутри, а воздух в процессе кипения в основном вышел из воды. Тяжелая крышка плотно закрывает кастрюлю. В процессе конденсации паров



внутри кастрюли выделяется тепло, препятствующее резкому снижению температуры воды, однако давление внутри падает. Когда мы снимаем крышку и насыпаем в спокойную воду заварку, появляется возможность для испарения воды изнутри вблизи возникших центров парообразования — чайнок. Ситуация напоминает состояние «перегретой» жидкости, в которой сначала отсутствуют центры парообразования, а мы их принудительно создаем.

24. Когда детали находились в кораблике, то общая сила, действующая на ванну изнутри, с одной стороны, была силой давления воды, а с другой, равнялась силе тяжести воды, кораблика и его содержимого. После высыпания деталей общая сила, действующая на ванну, не изменились по величине, но вместе с водой на ванну теперь стали давить детали конструктора, поэтому давление воды должно было упасть, а значит ее уровень в ванне должен был уменьшиться.

25. Грязный снег тает быстрее, потому что при загрязнении снега доля поглощенной солнечной энергии из общего количества всей падающей лучистой энергии увеличивается. В случае чистого снега значительная доля пришедшей от Солнца энергии отражается.

26. Внутренняя энергия горячей воды, налитой в стакан с сахаром, частично идет на растворение сахара, поэтому сладкий чай холоднее.

27. При горении керосиновой лампы продукты сгорания уносятся вверх, а на их место приходит порция чистого воздуха (снизу через отверстия в лампе) и процесс горения не прекращается. Кстати сказать, колпак у лампы способствует указанному выше конвективному обмену воздуха. Если мы подуем на лампу сверху или перекроем отверстие в верх-

ней части колпака, то поступление чистого воздуха (окислителя) прекратится, и лампа потухнет.

28. Больше нагреется тот шарик, теплоемкость материала которого меньше. Поскольку шарики падают с одинаковой высоты и массы их равны, то выделяются одинаковые количества теплоты. В нашем случае больше нагреется свинцовый шарик.

29. На ветру холоднее из-за того, что усиливается испарение выделяемых кожей паров воды, что требует дополнительного количества теплоты. Термометр нечувствителен к ветру, поэтому его показания «за углом» будут теми же, что и на ветру.

30. Гвоздь не плавится из-за того, что значительная доля поступающего к нему тепла вследствие теплопроводности уносится прочь.

31. С целью улучшения условий передачи тепла воде, а не стеклу, стоит выбрать стакан с тонкими стенками.

32. Вода охлаждается быстрее при перемешивании теплых и холодных ее слоев, теплопроводность играет при этом незначительную роль. Чем жидкость холоднее, тем она тяжелее (мы исключаем аномальную область вблизи $+4^{\circ}\text{C}$). Поэтому эффективнее будет охлаждение, если лед положить сверху. Кстати сказать, применительно к воздуху этот эффект «обигрывается» при помещении морозильной камеры холодильника наверху.

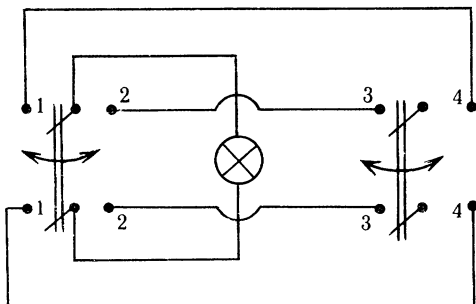
33. При взрыхлении сена увеличивают поверхность его соприкосновения с воздухом, а значит, и ускоряют время сушки.

34. Поскольку в любом сечении общий ток одинаков, то больше тепла выделится в том участке шара, который имеет меньшее сечение — значит, в местах крепления контактов.



35. При вынимании электронагревателя из воды резко уменьшается теплоотвод, происходит перегрев нагревателя и как результат он плавится, а зачастую и взрывается.

36. Схема включения (одна из возможных) показана на рисунке. У каждого переключателя два положения 1—1 и 2—2, 3—3 и 4—4.



Если у левого 1—1, то у правого 4—4, чтобы горела, и наоборот.

37. Если иголка не намагничена, то поднеся к ней середину магнита, мы не обнаружим взаимодействия. Если иголка намагничена, то она притянется и к середине магнита. Кроме того, у намагниченной иголки также есть северный и южный полюсы, которые притягиваются соответственно к южному и северному полюсам магнита и, наоборот, от-

талкиваются соответственно от северного и южного полюсов магнита.

38. Если одна из проволок длиннее другой в 4 раза, то другая имеет сечение в 4 раза большее, чем первая. Соответственно сопротивление длинной проволоки будет в 16 раз больше.

39. Человек днем лучше различает предметы в силу того, что от различных участков предметов и от разных предметов отражается разная доля из общего потока падающей солнечной энергии. При этом глаз реагирует на разницу в количестве отбрасываемой энергии, которая сама является долей упавшей на предмет энергии. С уменьшением общего количества падающей энергии, что происходит вечером, в такое же число раз уменьшается и отраженная энергия, а значит, и разница в порциях отраженной различными участками энергий уменьшается в такое же число раз. У глаза есть предельные возможности воспринимать падающую энергию, начиная с некоторого минимального количества. Поэтому, как только разница в освещенности различных предметов оказывается за пределом возможностей глаза, человек воспринимает общий серый фон.

40. Соль в массе серая или белая из-за процессов многократного рассеяния света, прежде чем он попадает к нам в глаза. Это аналогично тому, что сильно поцарапанное стекло также кажется белым. Мелкая стружка прозрачного плексиглаза также белая, наконец, барашки на воде, образованные мелкими каплями воды, также кажутся белыми.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Откололась пятая часть бриллианта.
2. На расстоянии 10 м.
3. Через 3 часа.
4. Две монеты по 15 коп и 6 монет по 20 коп.

5. Саша наверняка ошибся, поскольку в алгебраической сумме содержится нечетное количество (5) нечетных слагаемых, то и сумма должна быть нечетной.

6. Стоимость каждой из четырех покупок делится на 3, а затребованная сумма на 3 не делится.

7. Митя и Саша купили марки, отличающиеся от марок, купленных их друзьями, поэтому советские марки купили Петя и Толя, а так как Митя купил не болгарские марки, то он купил чехословацкие, а болгарские купил Саша.

8. 12 лет.

9. Да, верно, поскольку Ира не могла собрать грибов больше, чем Таня, то она собрала их больше, чем один из мальчиков, а Таня собрала грибов больше, чем второй, поскольку она собрала грибов больше всех.

10. 1 февраля в Ленинграде, 8 февраля в Риге, 1 марта в Пскове, 8 марта во Владимире.

11. Дарья Андреева, Софья Борисова, Мария Васильева, Анна Груздева.

12. Посчитаем число дружеских пар. Так как каждый дружен с 11 одноклассниками, то число пар равно $35 \cdot 11 : 2$. Деление на 2 произведено потому, что, перемножив 35 на 11, мы каждую пару считаем два раза. Но полученное число пар не является целым числом.

13. Мог. Например, если было вначале два бриллианта в 1,3 миллиона долларов каждый, один в 0,6 миллиона долларов и семь бриллиантов общей стоимостью 0,8 миллиона долларов.

14. Из условия следует, что если A и B — друзья, то C либо их общий враг, либо общий друг (иначе им троим не примириться). Возьмем всех друзей человека A . Из сказанного следует, что все они дружны между собой и враждуют с остальными. Пусть теперь A и его друзья поочередно ссорятся с друзьями и мирятся с врагами. После этого все окажутся друзьями.

Действительно, пусть A первым поссорился со своими друзьями и помирился со своими врагами, но тогда каждый из его бывших друзей будет с ним мириться, а бывшие враги останутся друзьями. Итак, все люди оказываются друзьями A , а следовательно, и друзьями между собой.

15. Выпало 352 страницы. Заметим, что номер последней из выпавших страниц должен быть четным и большим чем 387, т. е. 738.

16. Так как черноволосый не может быть ни мастером, ни кандидатом в мастера, то им является перворазрядник Рыжов. Мастер спорта Седов по условию не может быть седым, поэтому седым является кандидат в мастера Чернов.

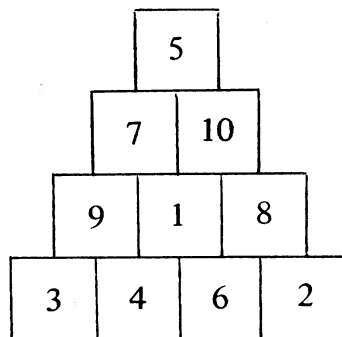
17. Самый сильный — Портос, затем д'Артаньян, Атос и Арамис.

18. Да, например так, как на рисунке.



19. 180 раз.

20. См. рисунок.



21. 4 руб 26 коп.

22. 40 лет и 30 лет.

23. 5 месяцев. Обычный год при этом должен начинаться с пятницы, а високосный — с четверга или пятницы.

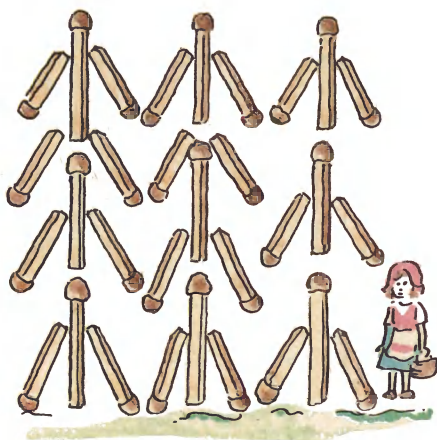
24. 32 года.

25. Возьмем два кувшина разной формы. Если они и разного цвета, то условие выполнено. Если одинакового, то возьмем третий кувшин, отличающийся от них цветом. Его форма (и цвет) не совпадают с формой хотя бы одного из первых двух кувшинов.

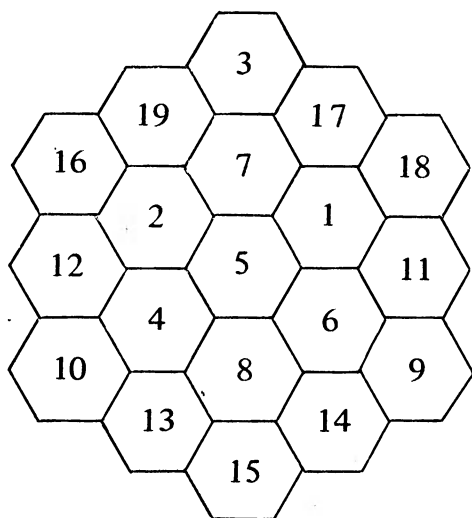
26. Своим первым ходом вторая девочка должна разбить лепестки на две равные симметричные половины, а затем отрывать лепестки симметрично тому, как это делает первая девочка.

27. Тот, кто бежит быстрее.

28. См. рисунок.

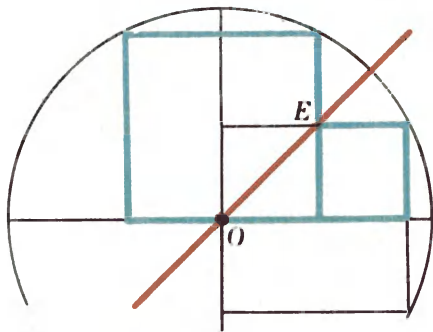


29. См. рисунок.



30. Обозначим через A сумму баллов, набранную Джоном перед последним из k тестов. Тогда $\frac{A+97}{k} = 90$ и $\frac{A+73}{k} = 87$, или $A = 90k - 97$ и $A = 87k - 73$. Отсюда $90k - 97 = 87k - 73$, $k = 8$.

31. См. рисунок.

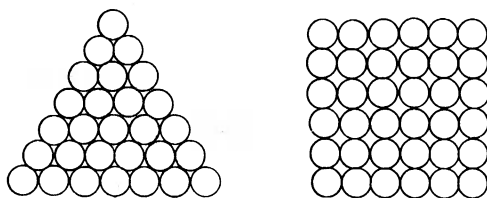


32. 1 руб 11 коп.

33. 2 часа 30 минут.

34. 60 коробок спичек, 39 пирожков и 1 банка консервов.

35. Из 36 шариков.



36. Обе теоремы неверны. Число 54 делится на 27, а сумма его цифр на 27 не делится. У числа 1989 сумма цифр делится на 27, а само число не делится на 27.

37. Аня в белом платье, Валя в голубом, Галя в зеленом, а Надя в розовом.

38. Да, была.

39. Проведем окружность радиуса AD с центром в точке A . Пусть точка E — точка ее пересечения со стороной BC . Искомый разрез проходит по прямой, проходящей через точку O параллельно прямой AE .

40. В насадке 2,5 ведра, в бочке 10 ведер или 4 насадки.

41. Нет. Пусть имеется x пятаков, y монет по 20 коп и z полтинников, тогда условия задачи запишутся в виде двух уравнений: $x + y + z = 20$; $5x + 20y + 50z = 500$. Разделим второе уравнение на 5 и из результата вычтем первое уравнение. Получим: $3y + 9z = 80$, но при целых y и z левая часть уравнения делится на 3, а правая нет.

42. Да. Обозначим через x количество голубоглазых среди B человек, B — количество блондинов среди всех B человек и через Γ — количество голубоглазых среди всех B человек. Тогда по условию, $\frac{x}{\Gamma} > \frac{B}{B}$. Умножая обе части неравенства на Γ и деля на B , получаем $\frac{x}{B} > \frac{\Gamma}{B}$, т. е. что число голубоглазых среди блондинов больше, чем среди всего населения.

43. Таблица изображена на рисунке (верхний на с. 139).





44. Карабасов больше. Пусть карабасов x , а барабасов y . Предположим, что карабасы вручили своим друзьям барабасам по визитной карточке. Число врученных карточек равно $9x$. Но это число равно и $10y$, поскольку каждый барабас получил по 10 визитных карточек. Значит, $9x = 10y$, откуда следует, что $x > y$.

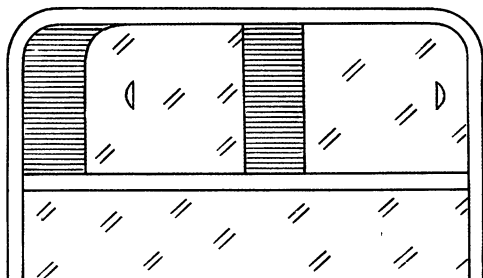
45. Неравенство справедливо, поскольку число, записанное как ШЕСТЬ меньше, чем 10 000, а число ДВАДЦАТЬ больше, чем число ДВА, умноженное на 10 000.

46. В любом году 13 число хотя бы раз является понедельником. Наибольшее число раз — 4.

47. 250 см^2 . Действительно, сдвинутое стекло пересекается с неподвижным по прямоугольнику размерами $10 \text{ см} \times 20 \text{ см}$ (см. рисунок на с. 139). Если закрыть окно, то этот прямоугольник исчезнет, т. е. открытая часть окна покроется площадью этого прямоугольника.

48. Ребята стоят в таком порядке: Олег, Юра, Володя, Миша, Саша.

Команды	Игры				Победа	Ничьи	Пораж.	Мячи	Очки
Старт		2 : 0	5 : 3	3 : 1	3	0	0	10-4	6
Комета	0 : 2		1 : 1	1 : 0	1	1	1	2-3	3
Ракета	3 : 5	1 : 1		2 : 2	0	2	1	6-8	2
Вымпел	1 : 3	0 : 1	2 : 3		0	1	2	3-6	1



49. Так как делимое в 6 раз больше делителя, то частное равно 6. Так как делитель в 6 раз больше частного, то делитель равен 36. Значит, делимое равно $6 \cdot 36 = 216$.

50. Пусть стрелка сдвинулась на x кг. Тогда $(2 + x) + (3 + x) = 6 + x$. Отсюда $x = 1$. Значит, один портфель имеет массу 3 кг, а второй — 4 кг.

51. Между тремя ударами часов 2 промежутка по 2 секунды. Между 9 ударами ча-

сов 8 промежутков, их общая длительность 16 секунд.

52. Да, например -1 , -2 , -3 , а также a , 0 , $-a$ для любого a .

53. 6 выстрелов: 4 раза в 17 и 2 раза в 16.

54. Да. Открыв, скажем, коробку, на которой написано «гвозди», и обнаружив там винты, мы определим, что в коробке с надписью «винты» лежат гайки, а там, где написано «гайки», лежат гвозди.

55. 0,5 и -1 .

56. Таких чисел нет. Так как произведение чисел по условию нечетно, то все они нечетны, но сумма четырех нечетных чисел всегда четна.

57. 130° .

58. При счете пальцы повторяются с периодом 8, причем большой палец и мизинец считаются за период по одному разу, а остальные — по два. Так как $1979 = 284 \cdot 4 + 7$, то последним будет тот палец, который был седьмым, т. е. указательный.

59. Цифру 5.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

К странице 29

1. Турист должен взять палатку, еду и одеяло.
2. Маршрут коммивояжера: $УХ - ЭХ - АХ - ОХ - ИХ - УХ$.
3. 26 человек.
4. Только одним нулем.
5. 3 бублика, 6 булок и 6 слоек.
6. 24 и 11, 48 и 43, 36 и 29, 228 и 227.
7. 8 экзаменов.

К странице 31, 32

1. Есть хотя бы один белый шар.
2. Все шары — белые.
3. Все шары — красные.
4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.
5. Некоторые ученики класса не были на собрании.
6. Ни одной девочки не было на собрании.
7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.
8. По крайней мере для одного x из множества M число x^2 не превосходит 4.
9. Все люди — не дети.
10. Для всех x из множества M имеем $x^2 - 2x + 1 \neq 0$, т. е. число 1 не принадлежит M .
11. Некоторые мужчины не выше двух метров.
12. Некоторые простые числа четны.
13. По крайней мере для одного простого числа p число $2^p - 1$ не является простым. (Это утверждение верно: при $p = 11$ имеем $2^p - 1 = 2047 = 23 \times 89$.)
14. Неверно. В урне может быть один белый шар, а остальные — синие.
15. Верно. Если бы в урне не было ни одного не белого шара, то все шары в ней были бы белые, т. е. одного цвета.
16. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может не хватить, если первыми вынуты все белые и черные шары — их как раз 21.
17. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и «хорошисты» (их $10 + 20 = 30$) и каждый ответит не более, чем на 4. Если же вызвать 31 человека, то по крайней мере один из них окажется отличником и ответит на 5.

К странице 36, 37

1. При любом натуральном m левая часть равенства — четное число.
2. а) Предположение о существовании такого треугольника противоречит теореме «Сумма углов треугольника равна 180° ».
3. Пусть существует такое число M . Тогда

$$M = 21a + 1 \text{ и } M = 14b + 3,$$

откуда

$$21a + 1 = 14b + 3$$

и

$$7(3a - 2b) = 2,$$

что невозможно.

4. Достаточно доказать утверждения: а) если m четно, то m^2 четно; б) если m четно или n четно, то mn четно.

5. Допустим, что точка C лежит между точками A и B ; тогда $AC + CB = AB$; но $AC > AB$, следовательно, $AC + CB \neq AB$. Значит, точка C не лежит между точками A и B .

6. Допущение истинности отрицания данного предложения приводит к противоречию с аксиомой параллельных прямых.

7. Достаточно к предложению «Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ », определяющему возрастающую функцию, применить закон контрапозиции.

8. Предположим, что слово *грозу* — подлежащее; тогда оно должно стоять в именительном падеже; но оно стоит в винительном падеже и, следовательно, не является подлежащим.

9. Нельзя. Допустим, что можно. Тогда полупериметр песочницы будет равен 5,5 м; но это невозможно, поскольку все доски имеют целочисленные длины.

10. Нельзя. Допустим, что можно. Тогда существуют натуральные числа x , y и z такие, что

$$x + 3y + 5 = 20$$

$$x + y + z = 7.$$

Для выполнения первого равенства необходимо, чтобы нечетное число слагаемых (одно или три) в его левой части были четными; в обоих случаях левая часть второго равенства будет числом четным. Следовательно, таких чисел x , y , z не существует, т. е. размен невозможен.

К странице 41

1. Степой доказано, что из свойства 1 состояний следует свойство 3, только для частного случая — когда две из трех точек совпадают.

2. Да.

4. Можно воспользоваться последней моделью, построенной Степой и его друзьями.

К странице 54

1. 10 кг.
2. Уменьшилось на 1%.
3. Да, на 1% первоначальной стоимости.

К странице 65, 66

1. Парадокс возник оттого, что не было определено, в каких годах, юлианских или григорианских, измеряют годовщину. Юлианский год длиннее (в днях), чем григорианский. 18 сентября исполняется 200 григорианских лет, а 20 сентября — 200 юлианских.

2. Добавление одного дня произошло 29 февраля 1900 г.; такого дня нет в григорианском календаре (невисокосный год), 25 декабря наступило позже и надо к нему прибавлять уже 13 дней, как в XX веке.

3. Нарисуйте вдоль окружности 7 точек и отметьте их знаками светил в том порядке, в котором они располагались на семи сферах в системе мироздания Птолемея: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн.

Если теперь соединить точки в том порядке, в каком идут дни недели, то получится семилучевая звезда — священный символ. Это и есть та скрытая симметрия, которая заключена в днях недели.

4. Дело в том, что на кораблях не было часов. Полдень каждый день определялся по Солнцу. Поэтому на корабле учитывали часовые пояса, но не учитывали линию дат. День, который не был прибавлен при ее пересечении с востока на запад, и был «потерян».

К странице 110

Очевидно, решив задачу 3, мы тем самым решим и обе предыдущие задачи.

Сначала покажем, что сцепить n колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими, можно только при условии, что произведение nk четно. Действительно, представим каждое кольцо как вершину правильного n -угольника и соединим отрезками те его вершины, которым соответствуют сцепленные кольца. Теперь посчитаем количество таких отрезков. Из каждой вершины их выходит k штук, а вершин n ; перемножив эти два числа, получим nk — удвоенное количество отрезков, поскольку каждый отрезок мы при этом посчитали дважды. Но количество отрезков — целое число, поэтому число nk должно делиться на 2.

Теперь покажем, что если nk четно, то нужное сцепление произвести можно. Пусть сначала число k четно, $k = 2p$, где p — целое число.

Соединив каждую вершину с p ближайшими вершинами справа и с p ближайшими вершинами слева, получим точное указание, какие кольца с какими нужно сцепить. Если же k — нечетное число, то оно представляется в виде $k = 2p + 1$; при этом n обязано быть четным. В этом случае вновь соединим каждую вершину с p ближайшими соседями слева и с p ближайшими соседями справа, а также с диаметрально противоположной вершиной (такая есть, так как n — четное число).





ЗАНИМАТЕЛЬНО О ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

С е р и я «Библиотечка «Квант», вып. 50

Редактор *Л. А. Панюшкина*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 12520

Сдано в набор 03.12.86. Подписано к печати 08.07.87.
Т-12164. Формат $70 \times 108^{1/16}$. Бумага № 2 офсетная. Гарни-
тура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,6.
Усл. кр.-отт. 51,1. Уч.-изд. л. 13,05. Тираж 336 000 экз.
Заказ В-519. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография издательства Татарского обкома КПСС
г. Казань, ул. Декабристов, 2.

45 коп.